

Case study: Archimedes og π

Med en liten kalkulator som CLASSWIZ kan vi bevege oss inn i matematikkens historie og få en forståelse for hvordan en av oldtidens største vitenskapsmenn, Arkimedes fant en verdi for π .



$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Archimedes of Syracuse

He lived from 287-212 BC and was a Greek mathematician, physicist, engineer, inventor and astronomer. Although few details of his life are known, he is regarded as one of the leading scientists in classical antiquity and generally considered the greatest mathematician of antiquity and one of the greatest of all times.

(picture: <http://www.kidsmathgamesonline.com/pictures/mathematicians/archimedes.html>)

$\frac{223}{71}$ 3.14084507	<	π 3.141592654	<	$\frac{22}{7}$ 3.142857143
--------------------------------	---	----------------------	---	-------------------------------

Archimedes anticipated modern calculus and analysis by applying concepts of infinitesimals and the method of exhaustion to derive and rigorously prove a range of geometrical theorems, including the area of a circle, the surface area and volume of a sphere, and the area under a parabola and he derived a very accurate approximation of π finding

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \Leftrightarrow 3.1408 < \pi < 3.1428; \bar{\pi} = 3,1418$$

Det matematiske verktøyet som Arkimedes benyttet.

- Han kjente til hvordan å finne brøker som gode tilnærminger for røtter : Eksempel

$\sqrt{70}$? Første til næring kan være $\sqrt{70} = 8.5 = \frac{17}{2}$ som et gjennomsnitt av heltallsrøttene

$8 = \sqrt{64} < \sqrt{70} < \sqrt{81} = 9$. Den neste tilnæringen er gjennomsnittet av første tilnærmet verdi og 70 dividert med første tilnæring osv.

$\frac{17 + \frac{\sqrt{70} \times 2}{2}}{2}$ $\frac{569}{68}$	$\frac{17 + \frac{\sqrt{70} \times 2}{2}}{2}$ 8.367647059	Ans^2 70.0175173
---	--	------------------------------

Ved å gjenta prosedyren får vi tredje svært god tilnærming nå med 6 korrekte siffer

$\frac{569 + \sqrt{70 \times 68}}{68 + 569}$ $\frac{2}{8.366600331}$	Ans^2 70.0000011	$\sqrt{70}$ 8.366600265
--	-----------------------------	---------------------------

Dette må være veldig bra.

2. Han kjente også til Pytagoras' teorem for rettvinklede trekninger.

Antikkens egypterne brukte $\pi \approx \frac{22}{7}$ og i bibelen kan du lese at $\pi \approx 3$ men uansett er metoden til Arkimedes den mest imponerende.

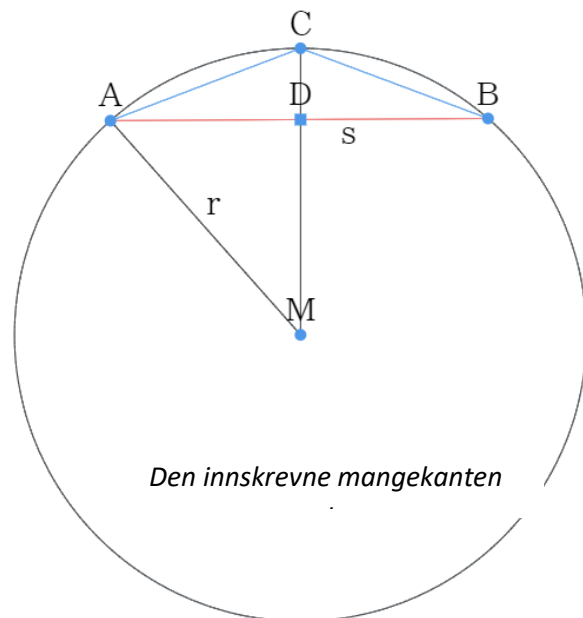
Metoden til Arkimedes

En regulær mangekant med n sider med lengde s er innskrevet i en sirkel med radius 1.

Omkretsen er da $n \cdot s$ og en tilnærmet

$$\text{verdi for } \pi \approx \frac{s \cdot n}{2}$$

M er sentrum i sirkelen. $AB = s$ er siden i mangekanten og MC er en midtnormal til AB . Denne skjærer AB i D . Da blir AC og CB siden i en mangekant med dobbelt så mange sider. Oppgaven blir nå å bestemme CB som en funksjon av $AB = s$.



Dette gir oss følgende rekursjon:

$$AD = \frac{s}{2}; MD = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} \Rightarrow DC = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$CB = \sqrt{DC^2 + DB^2} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$$

Vi velger $n = 6$ som gir $s_6 = 1$ og videre $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ se CB for $s = 1$. Vi følger metoden til Arkimedes og da vi vet at $\sqrt{3} \approx 1.7$ velger vi om første tilnærming:

$$\sqrt{3} \approx \frac{17}{10} \Rightarrow \sqrt{3} \approx \frac{\frac{17}{10} + \frac{30}{17}}{2} = \frac{589}{340}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx \sqrt{2 - \frac{589}{340}} = \sqrt{\frac{91}{340}} \approx \frac{19}{37} = \frac{19}{37} \sqrt{\frac{91}{340}} \approx \frac{19}{37} + \frac{91 \cdot 37}{340 \cdot 19}$$

Dette regner vi ut og finner π tilnærmet for en regulær 12 kant :

$\frac{19 + \sqrt{91} \times 37}{37 + \sqrt{340} \times 19}$ $\frac{2}{0.5173604719}$	$\text{Ans} \times 12 \div 2$ 3.104162832
---	---

Vi forlater nå metoden til Arkimedes. For deg som ønsker kan du lage neste tilnærming for $\sqrt{3}$ og en ny verdi for π

Vi fortsetter med moderne verktøy som ClassWiz fx-991EX og benytter answer M til å lage en rekursjon , Rekursjonen starter med en regulær sekskant med side s=1 fortsetter med 12 kant, 24

kant osv. Hvert steg i rekursjonen er: $\sqrt{2 - \sqrt{4 - \text{Ans}^2}}$ som dobler antall sider og regner ut siden..

Rekursjonen gjentas ved å trykke = tast: 1=s2ps4pMd=====

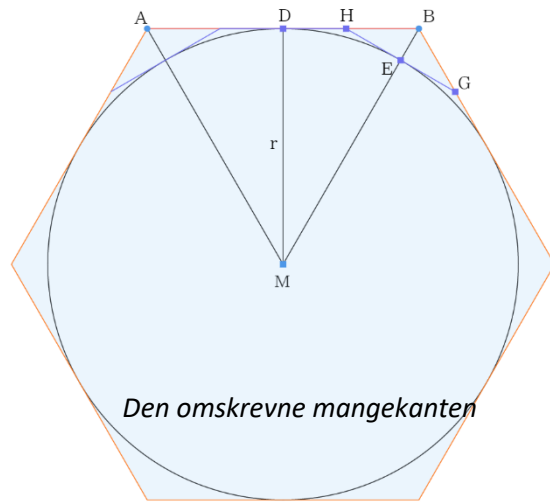
1 s_6	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - \text{Ans}^2}}$ s_{12} $0.5176380902...$	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - \text{Ans}^2}}$ s_{384} 0.01636227921
-----------	---	--

Nå kan vi lage et mye bedre estimate for π ved å gå ut fra et regulært polygon med 384 sider hvor $s_{384} \approx 0.01636227921$

$\text{Ans} \times 384 \div 2$ 3.141557608
--

Dette må sies å være veldig bra !

Vi fortsetter med den omskrevne mangekant
 $AB = s_n = s$ som siden i en regulær mangekant
 med n sider. Vi lar $DH = HE = EG = x$ og
 $HG = s_{2n} = 2x$. Oppgaven er nå å bestemme
 $2x$ som funksjon av s .



$$DB = \frac{s}{2}; HB = \frac{s}{2} - x$$

$$MB = \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}; EB = \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}} - 1$$

Når $\triangle HEB$ er rettvinklet får vi:

$$HE^2 = HB^2 - EB^2$$

$$x^2 = \left(\frac{s}{2} - x\right)^2 - \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{4}} - 1\right)^2$$

$$= \frac{s^2}{4} - sx + x^2 - 1 - \frac{s^2}{4} + 2\sqrt{1 + \frac{s^2}{4}} - 1 \Rightarrow sx = 2\sqrt{1 + \frac{s^2}{4}} - 2 \Rightarrow 2x = \frac{2(\sqrt{4 + s^2} - 2)}{s}$$

Dette gir oss en ny rekursjon hvordan å gå fra siden i en regulær mangekant til siden i en regulær mangekant med dobbelt så mange sider.

$$s_{2n} = \frac{2(\sqrt{4 + s_n^2} - 2)}{s_n}$$

Vi kjenner til at Arkimedes benyttet disse rekursjonene og at han kunne starte enten med en regulær firkant eller en sekskant. Vi velger en regulær sekskant med side $s_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ og gjentar rekursjonen :

2as3=2aME(s4+Md\$2)=====

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

s_6

$$\frac{2(\sqrt{4 + \text{Ans}^2} - 2)}{\text{Ans}}$$

s_{12}

$$\frac{2(\sqrt{4 + \text{Ans}^2} - 2)}{\text{Ans}}$$

s_{384} 0.01636282681

$$\text{Ans} \times 384 \div 2$$

3.141662747

Regner vi ut gjennomsnitt for den innskrevne og omskrevne sirkel får vi svært god god tilnærming til π :

$$\frac{\text{Ans} + 3.141557608}{2}$$

3.141610177