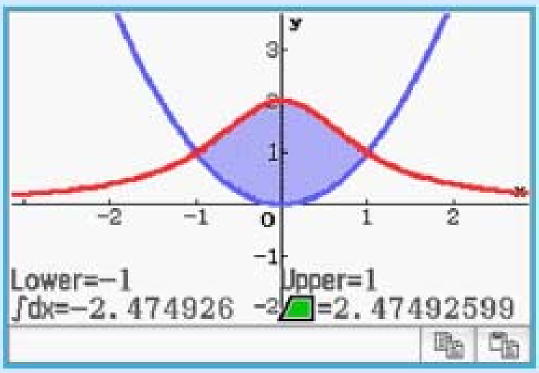
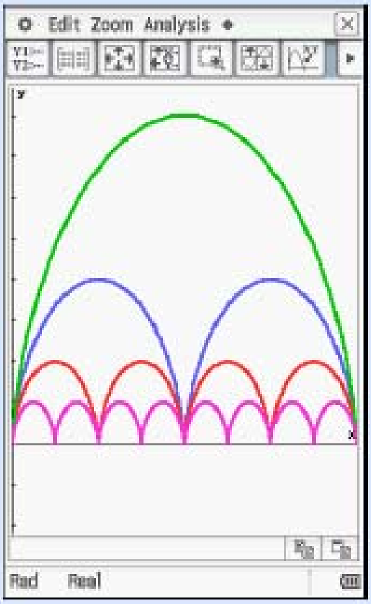
Casio Scandinavia AS

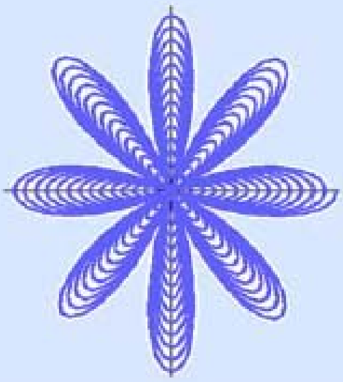
OPPLÆRINGSHEFTE

for videregående skole

ClassPad II fx-CP400







Tor Andersen

Vg 1, Vg 2 og Vg 3

Om dette heftet:

Opplæringsheftet for Casio ClassPad II fx-CP400 inngår i en serie av opplæringshefter som Tor Andersen har skrevet for Casio lommeregnere. Heftene er spesielt beregnet på elever i videregående skole. Dette opplæringsheftet gir tips om hvordan du kan gå fram for å løse aktuelle oppgaver i matematikk på ulike trinn i videregående skole. Opplæringsheftet erstatter ikke brukerveiledningen, men er ment å være et nyttig supplement som skal gjøre det lettere å bruke lommeregneren i matematikktimene.

Forfatter: Tor Andersen (tor.andersen@ude.oslo.kommune.no)

Tor Andersen er ansatt som spesialkonsulent i Utdanningsadministrasjonen i Oslo kommune, avdeling for pedagogisk utvikling og kvalitet. Han har skrevet lærebøker i matematikk og utgitt litteratur for brukere av Casio lommeregnere og programvare. Tor Andersen er redaktør for Casionytt.

Dette opplæringsheftet er skrevet for lommeregneren Casio ClassPad II fx-CP400.

FORORD

Opplæringsheftet erstatter ikke brukerveiledningen, men er ment å være et nyttig supplement som skal gjøre det lettere å bruke lommeregneren i realfagstimene i den videregående skolen. Eksemplene og oppgavene er basert på læreplanene i matematikk for alle trinn i videregående skole.

I de første kapitlene er tastetrykk og framgangsmåte mer detaljert beskrevet. Forhåpentligvis er de detaljerte beskrivelsene til nytte for brukere som ikke har erfaring med lommeregneren fra før. Etter hvert blir beskrivelsene mindre detaljerte. Dersom det oppstår tvil om framgangsmåten, ber vi leseren om å studere brukerveiledningen.

Dette opplæringsheftet tar ikke mål av seg til å erstatte lærebøkene i matematikk. I heftet går vi nokså rett løs på eksempler og oppgaver uten å ha redegjort for teorien først. Derfor bør opplæringsheftet brukes parallelt med læreboka. Siden dette opplæringsheftet ikke inneholder en egen oppgavesamling, oppfordrer vi leseren til også å løse oppgaver fra lærebøkene.

Brukerveiledningen for Casio ClassPad II fx-CP400 er svært omfattende. Det betyr at mange funksjoner og kommandoer ikke blir omtalt i dette opplæringsheftet. Vi har prioritert de mest brukte funksjonene og kommandoene som er nødvendig for å kunne oppleve lommeregneren som et nyttig hjelpemiddel i videregående skole.

Jeg takker Casio Scandinavia AS ved Kjell Skajaa for godt samarbeid og hjelp med produksjonen av opplæringsheftet for Casio ClassPad II fx-CP400.

Oslo - september 2013

Tor Andersen

tor.andersen@ude.oslo.kommune.no

Innhold

1. Oppstart

1.1 Hovedmenyen

Slå på lommeregneren CP400 ved å trykke på 

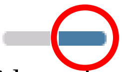
.

Vi slår av lommeregneren ved å trykke på 

etterfulgt av 

.

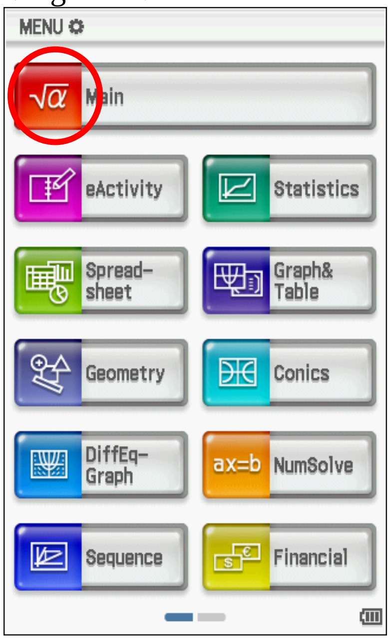
Når vi slår på lommeregneren, kommer dette skjermbildet opp. Se nedenfor til venstre.

Trykk på  .

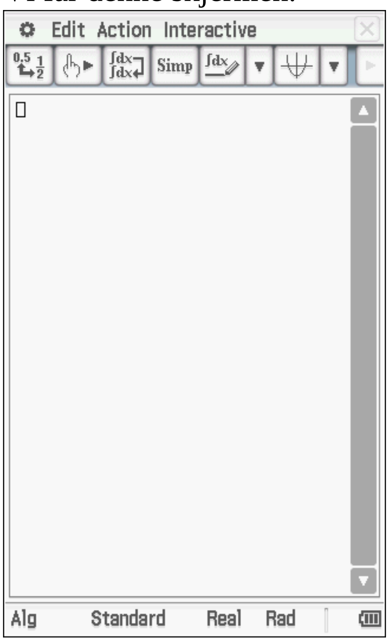
Hovedmenyen.

Gir side 2 i hovedmenyen.

Velg Main.



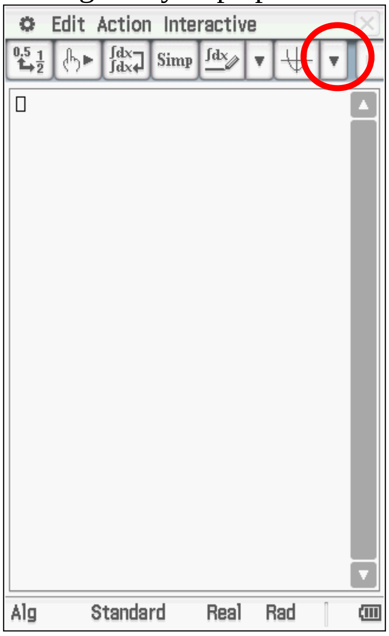
Vi får denne skjermen.



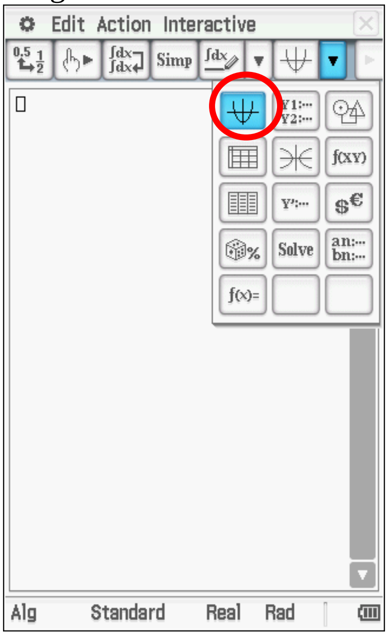
Bringer oss tilbake til hovedmenyen.

1.2 Delt skjerm med ”dra og slipp”

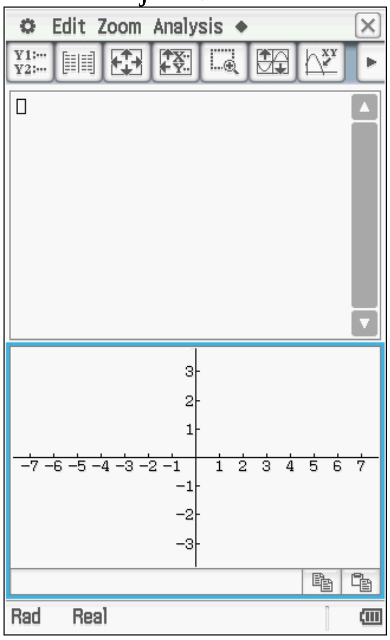
Main gir. Trykk på pil.



Velg.

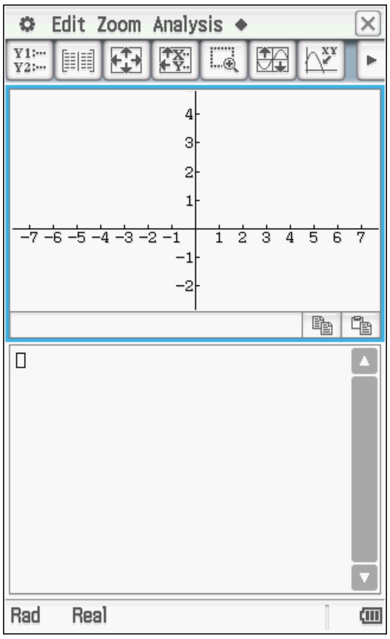


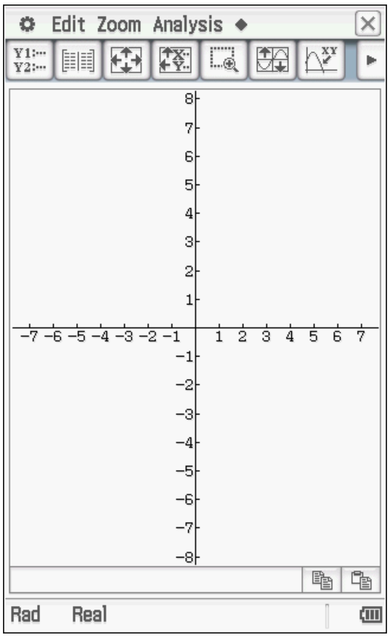
Gir delt skjerm.

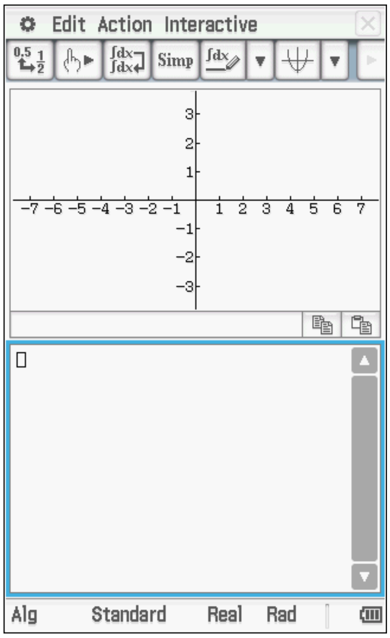


Skjermbildet ovenfor til høyre viser Main-vinduet øverst og Geometri-vinduet nederst.

Resize en gang til.



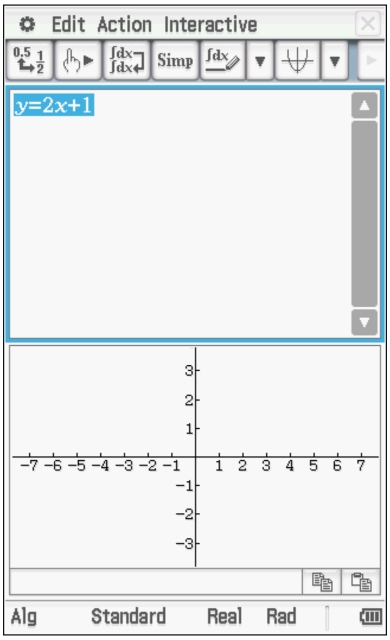




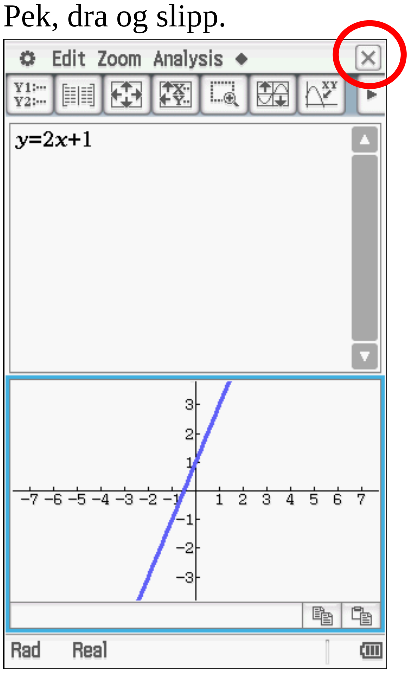
Klikk i Main-vinduet før å gjøre dette til det ”aktive” vinduet. Aktivt vindu har blå ramme.

Skriv y=2x+1

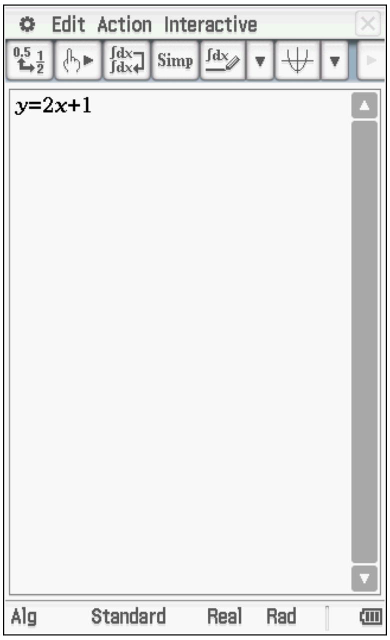
Marker med pekeren.



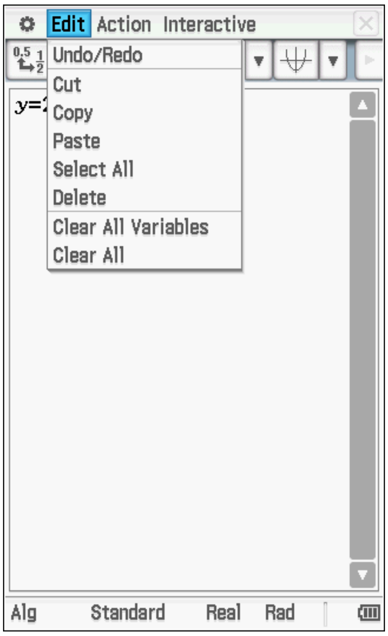
Pek, dra og slipp.



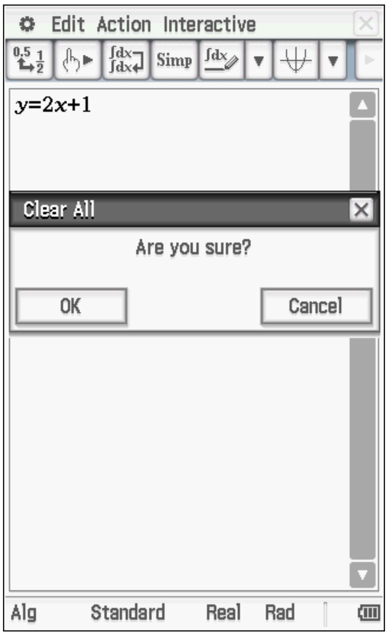
Trykk på X for å slette grafen.



Velg Edit og Clear All.

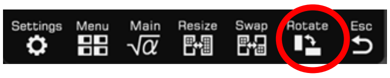


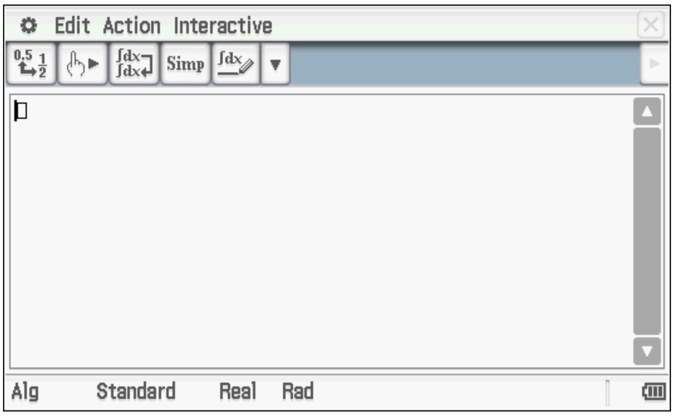
Trykk OK.



Vi lærer mer om Edit i neste kapittel.

Horisontal skjerm





Gir horisontal skjerm i Main.

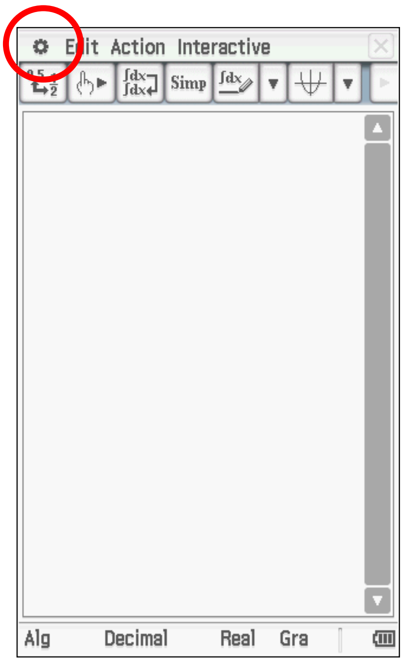
Horisontal skjerm er egnet for spesielt lange uttrykk.

Trykk på Rotate en gang til for å få tilbake vertikal skjerm.

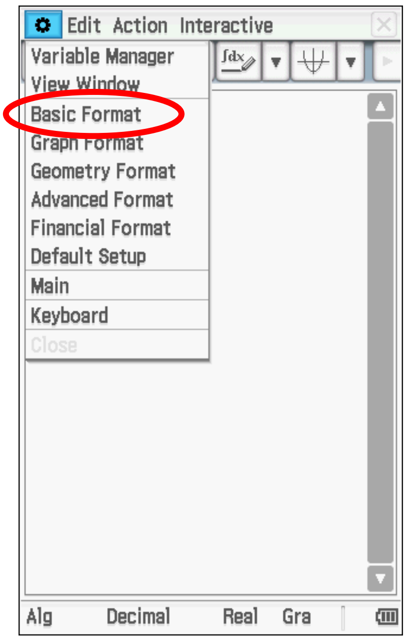
1.3 Innstillinger

Vi kan foreta innstillinger i hver av applikasjonene ved å trykke på 

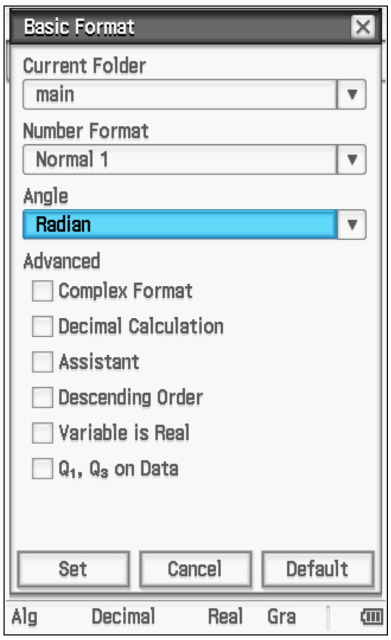
Velg Main og trykk.



Velg Basic Format.



Valg bekreftes ved SET.



Innstillinger vises nederst på skjermen.

Trykk på Rad og se hva som skjer.

Les mer om innstillinger i brukerveiledningen. I dette opplæringsheftet vil vi beskrive forskjellige innstillinger i kapitlene som følger.

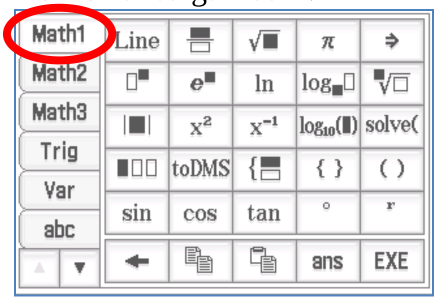
1.5 Soft Keyboard

CP400 er utstyrt med ekstra keyboards.
Disse dukker opp på skjermen ved å trykke
på knappen 

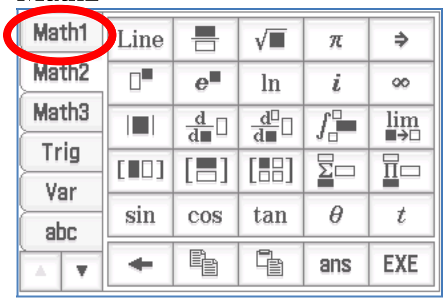
.

Trykker du en gang til på denne knappen, vil det såkalte ”soft keyboard ” bli slått av.

Her har vi valgt Math1.

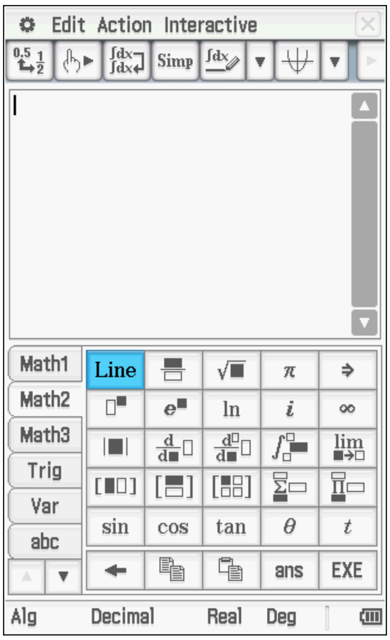


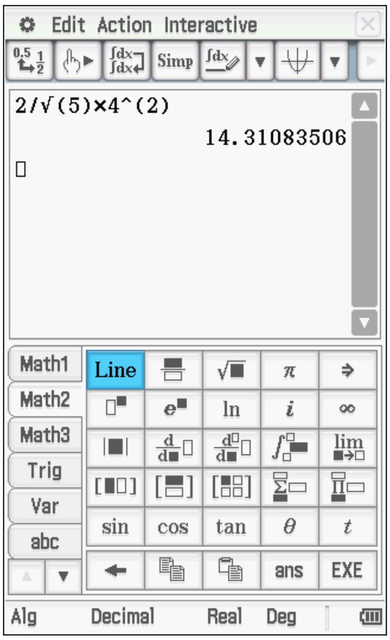
Math2

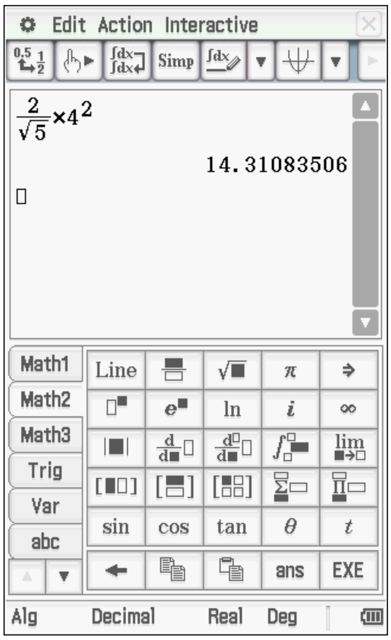


Gjør deg kjent med knappene som finnes i de ulike ”soft keyboardene”.

Merknad:
Her er Line aktiv.





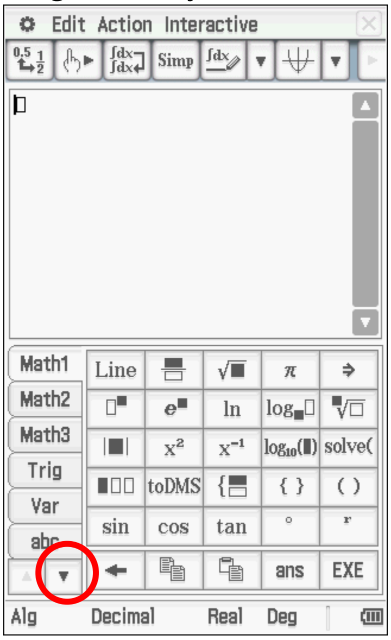


Skjermbildet i midten viser hvordan for eksempel brøk, kvadratrot og potens blir skrevet ut når Line er aktiv. I dette opplæringsheftet vil Line være slått av. Brøker, potenser, kvadratrøtter og matematiske uttrykk kommer da fram med vanlig lærebokstandard.

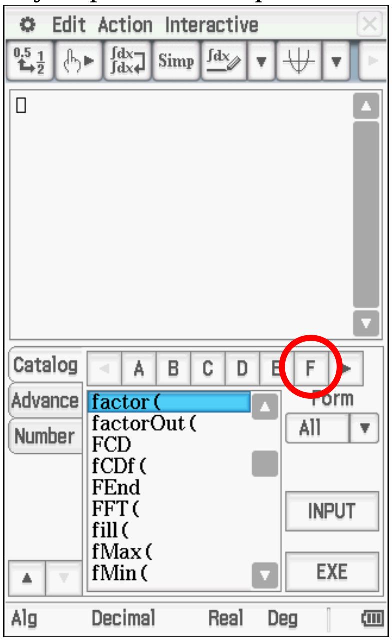
1.6 Katalogen

I Catalog finner vi alle kommandoer og funksjoner.

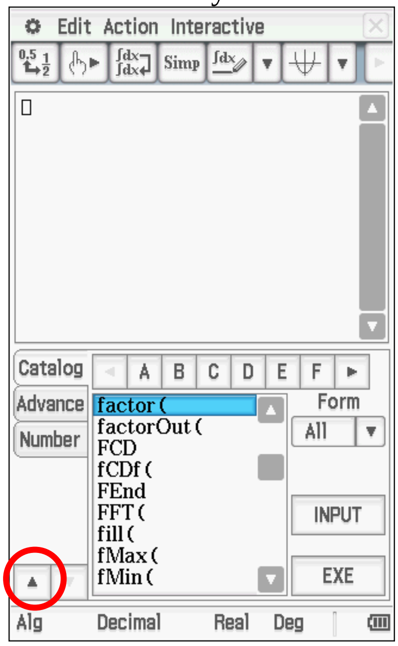
Velg Main. Trykk ▼



Trykk på for eksempel F.

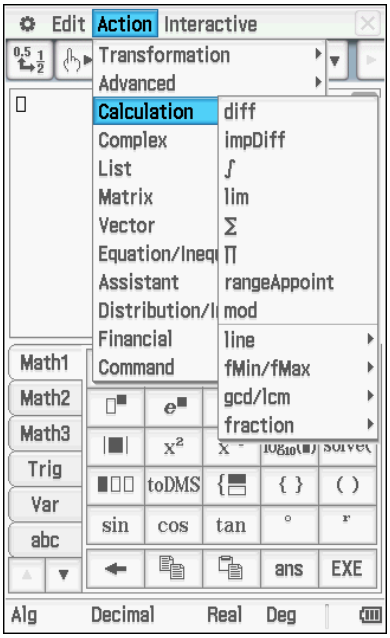


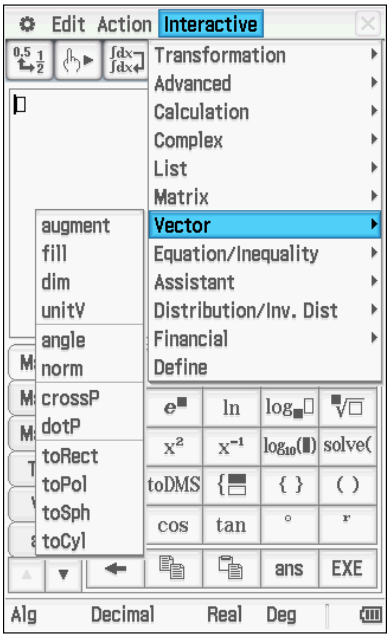
Tilbake ved å trykke ▲



Merknad:

Vi finner også en rekke kommandoer og funksjoner i "Action" og "Interactive".



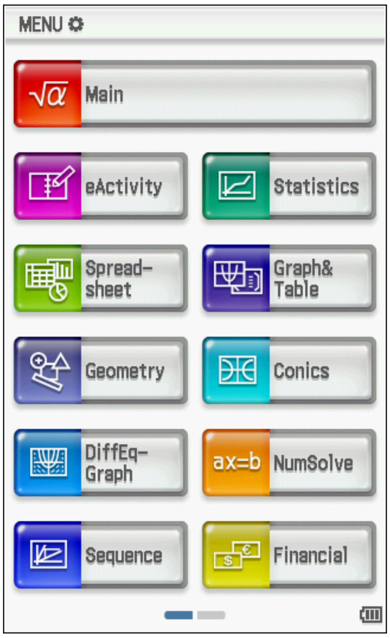


2. Grunnleggende regning

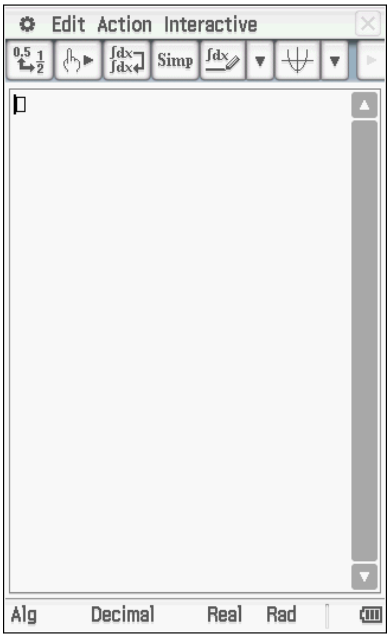
2.1 Addisjon og subtraksjon

 Trekk sammen: $23+14-9=$

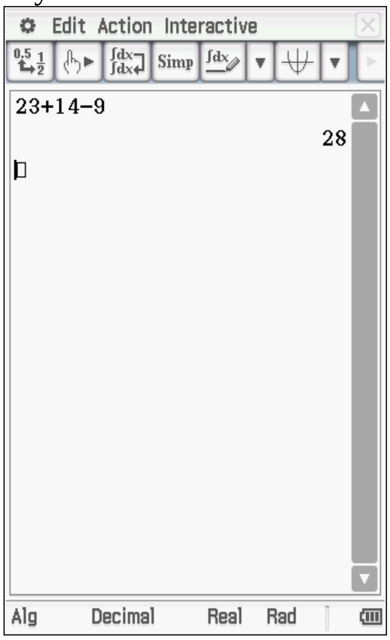
MENU. Velg Main



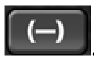
Skjerm.



Skriv inn regnestykket.
Trykk EXE.

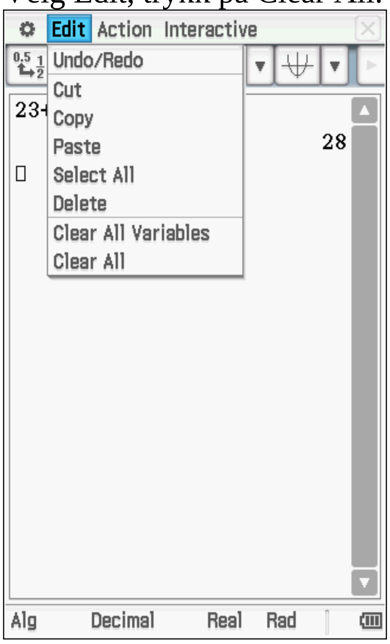


Merknad:

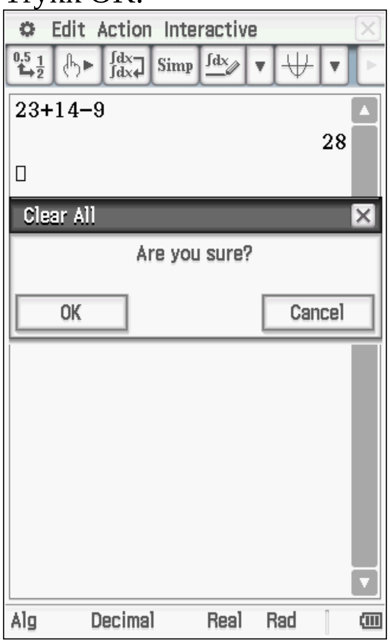
Operasjonstegnet for subtraksjon er . Negativt fortegn til et tall er .

2.2 Renske skjermen

Velg Edit, trykk på Clear All.



Trykk OK.

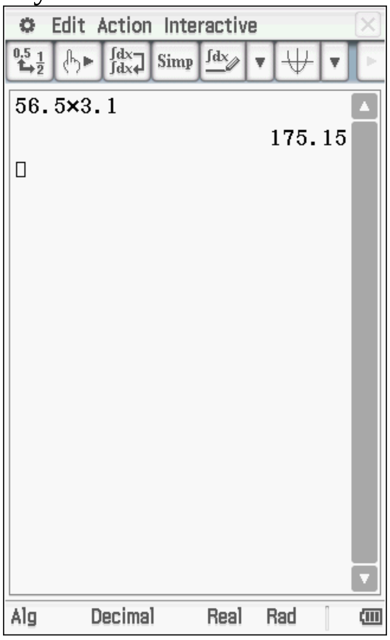


Delete sletter kun linje der markøren er.

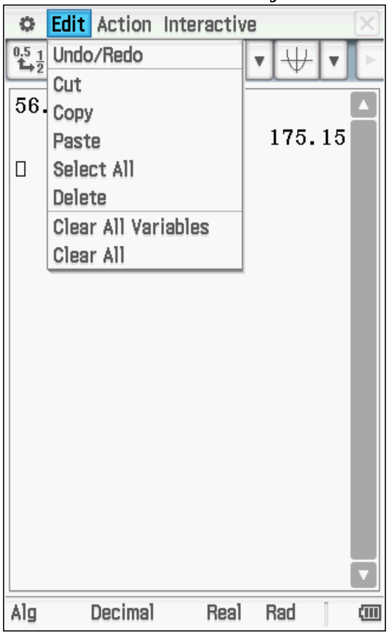
2.3 Multiplikasjon

Regn ut: $56{,}5 \cdot 3{,}1 =$

Skriv inn regnestykket.
Trykk EXE.



Edit.
Delete sletter kun linje der markøren er.



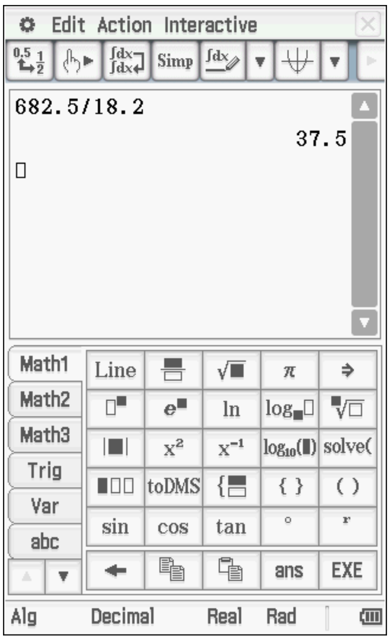
Merknad: Desimalkomma er punktum.

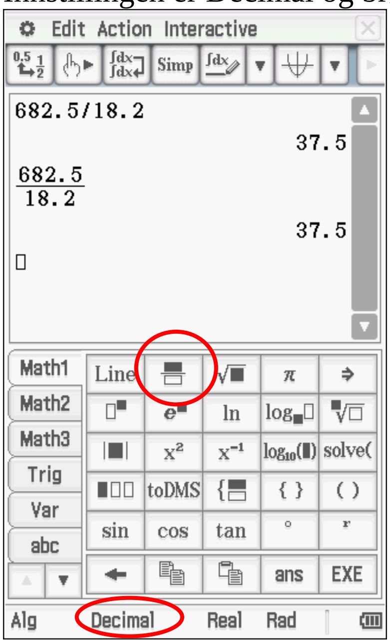
2.4 Divisjon

Regn ut: $682{,}5 : 18{,}2 =$

Divisjonstegn er ÷.

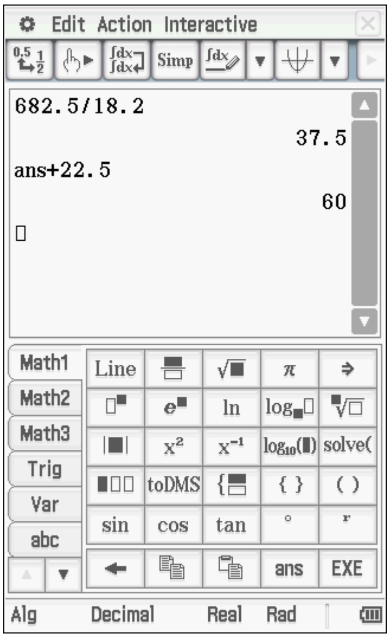
Trykk **Keyboard** etterfulgt av .
Innstillingen er Decimal og brøken skrives som et desimaltall.





2.5 Regne videre med forrige svar

Forrige svar var 37,5. Adderer 22,5 til dette svaret.

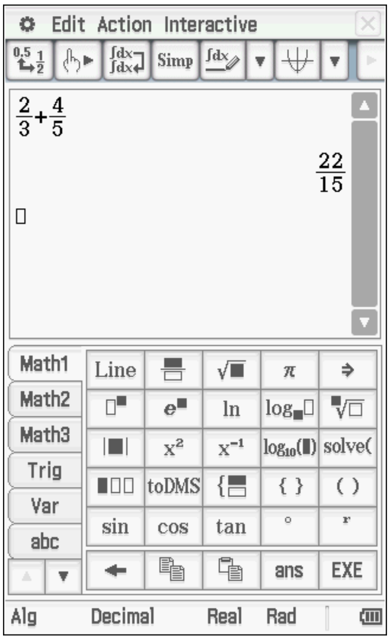


Trykk + og skriv inn 22,5.
Merk: ans kommer automatisk opp på skjermen.

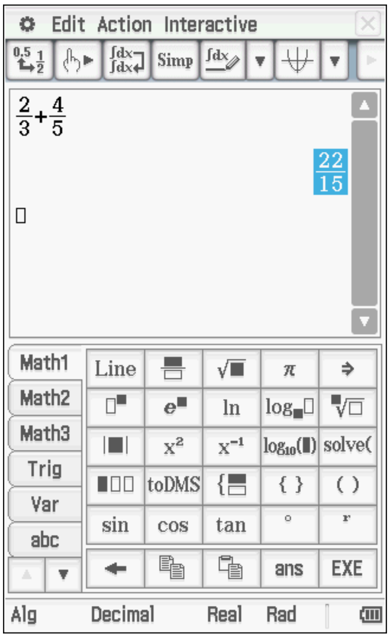
2.6 Brøk

Trekk sammen: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=$

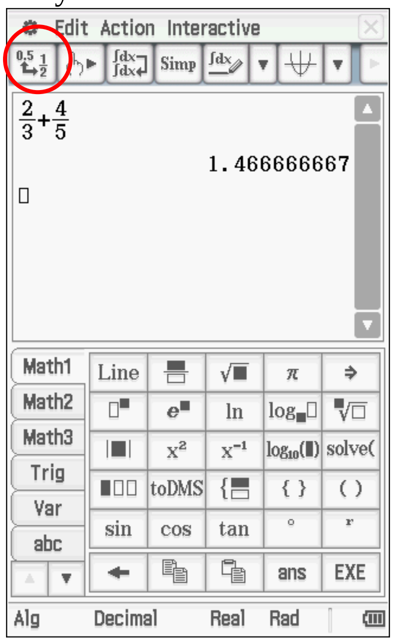
Velg brøk i Keyboard. Du kan bruke piltaster til å flytte skrivemarkøren.



Skifte fra brøk til desimal.



Trykk

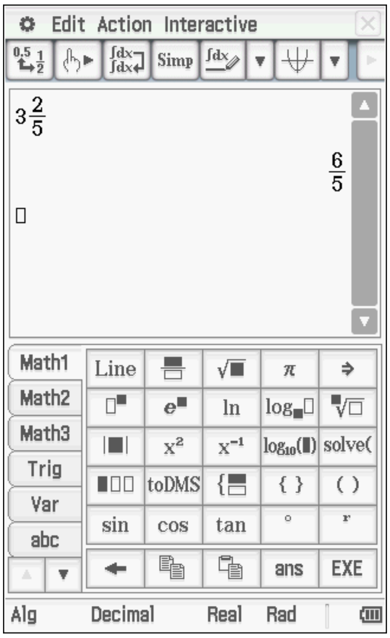



Veksler mellom brøk og desimal.

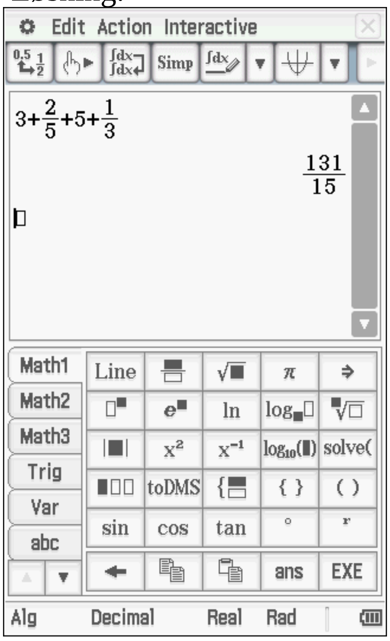
2.7 Blandet tall

Trekk sammen: $3\frac{2}{5}+5\frac{1}{3}=$

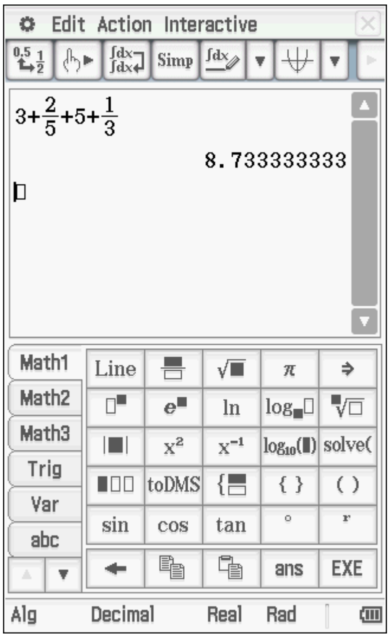
Merk at $3\frac{2}{5}$ blir tolket som $3\times\frac{2}{5}$ på fx-CP400.



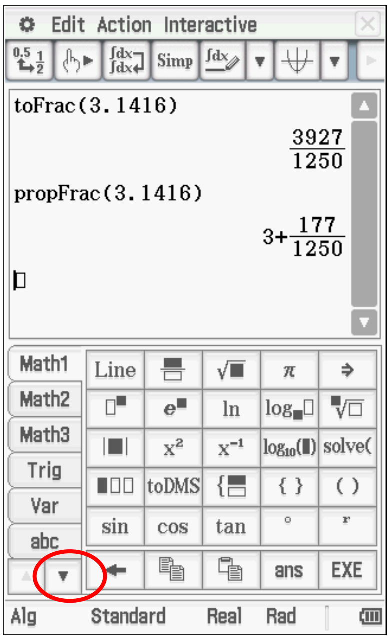
Løsning.



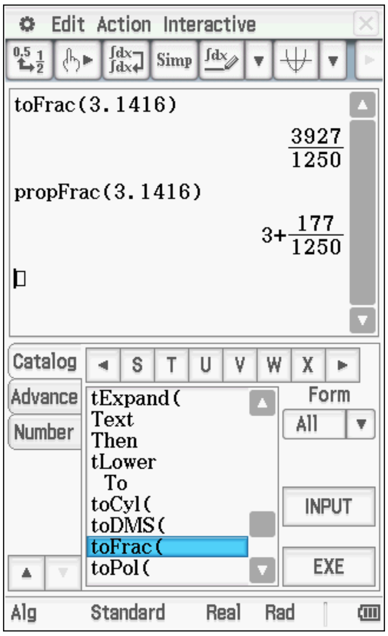
Svar som desimaltall.



Desimaltallet 3,1416 er tilnærmet lik π. Skriv tallet som brøk og blandet tall.



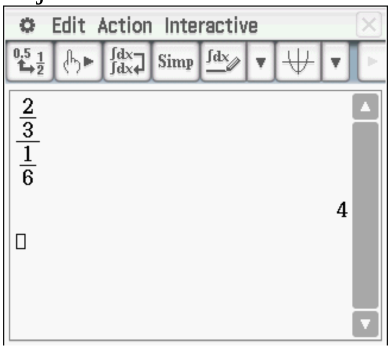
Vi finner kommandoene i Catalog.



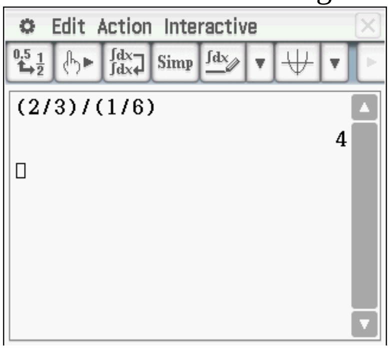
2.8 Brudden brøk

 Regn ut: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} =$

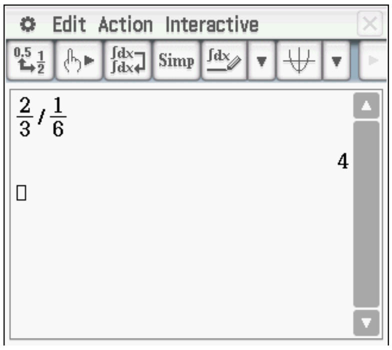
Skjerm.



Parentesene er nødvendig.

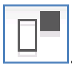


Eller slik.

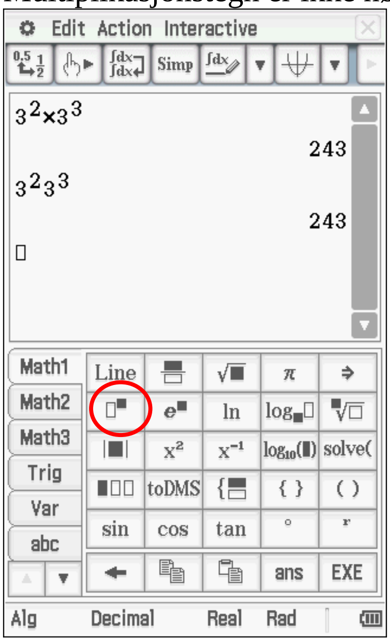


2.9 Potenser

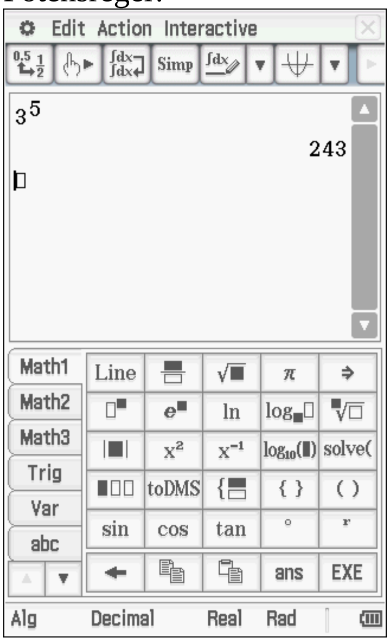
 Regn ut: $3^2 \cdot 3^3 =$

Bruk .

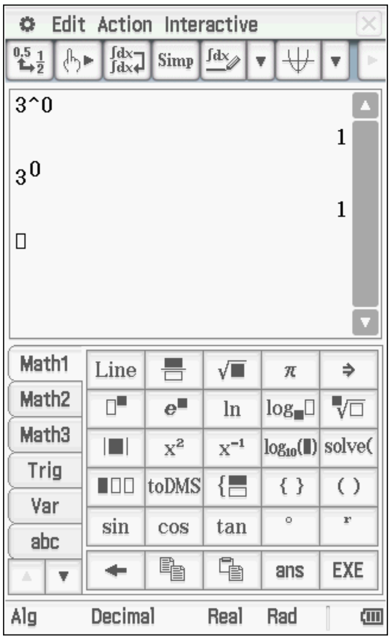
Multiplikasjonstegn er ikke nødvendig.



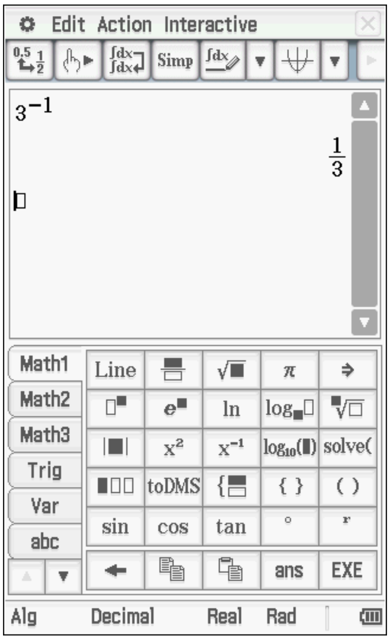
Potensregel?



Merk at vi også kan bruke ^.

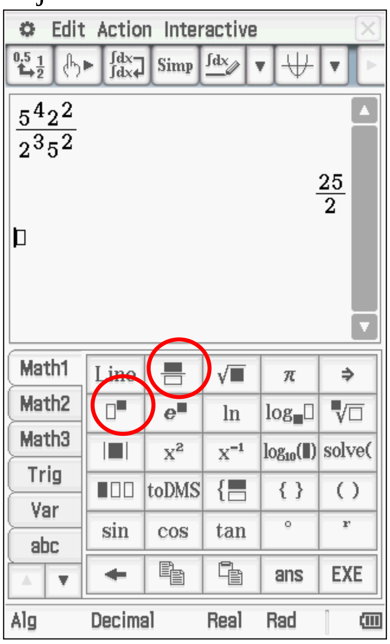


Merk.

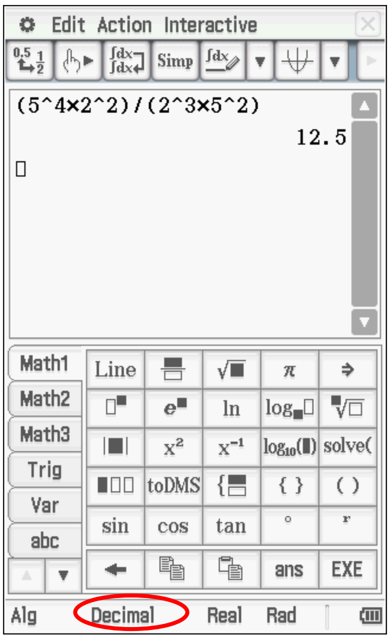


 Regn ut: $\dfrac{5^4 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^2} =$

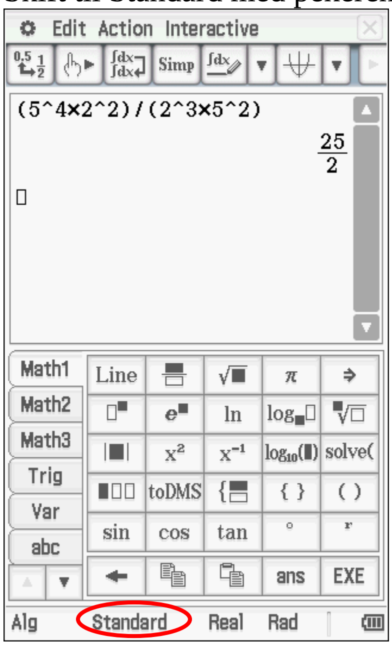
Skjerm.



Svar som desimaltall.



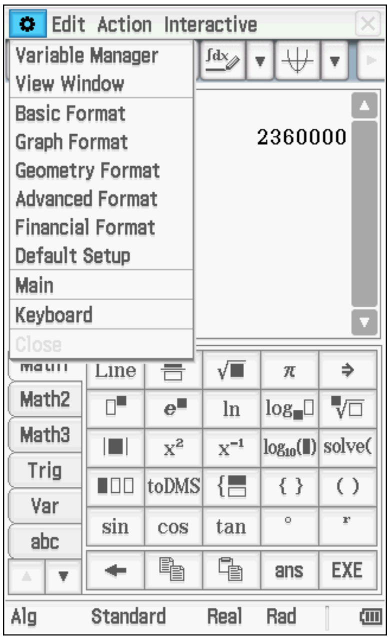
Skift til Standard med pekeren.



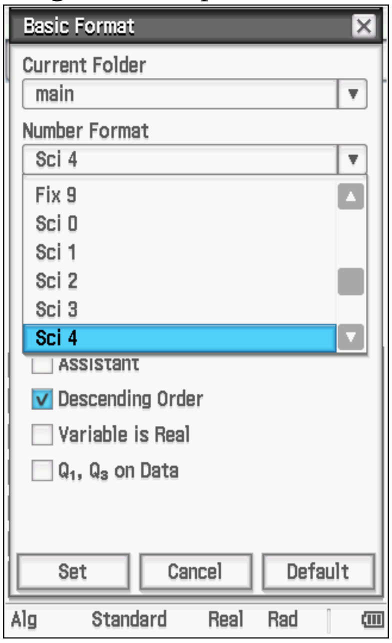
2.10 Tall på standardform

 Skriv 2 600 000 på standardform.

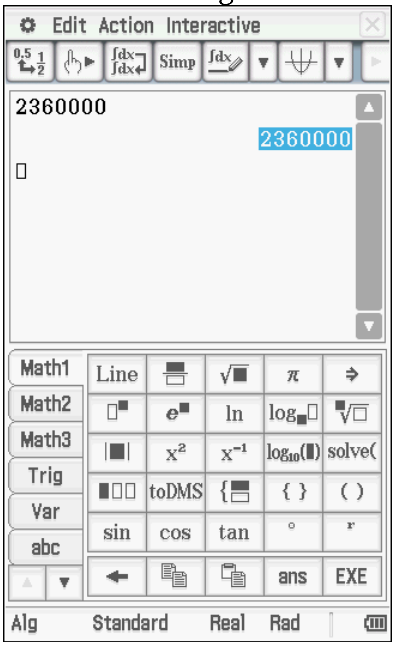
Velg Basic Format.



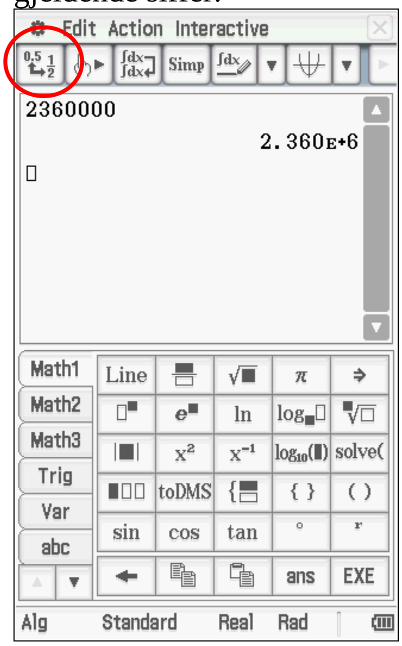
Velg for eksempel Sci 4.



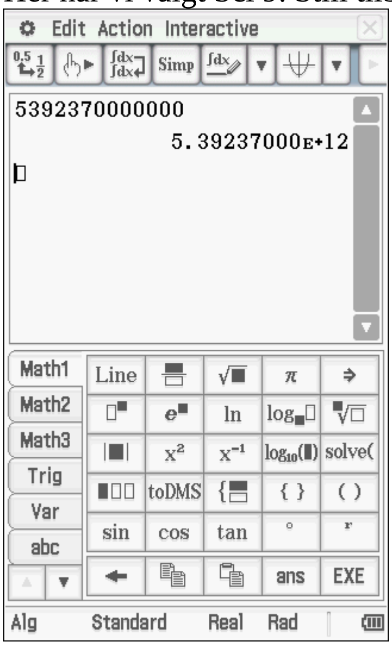
Skriv inn tallet og marker.



Trykk på . Sci 4 skriver tallet på standardform med fire gjeldende siffer.



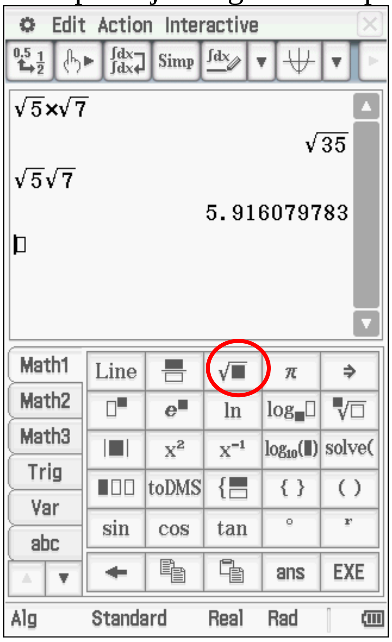
Her har vi valgt Sci 9. Still tilbake til Normal 1.



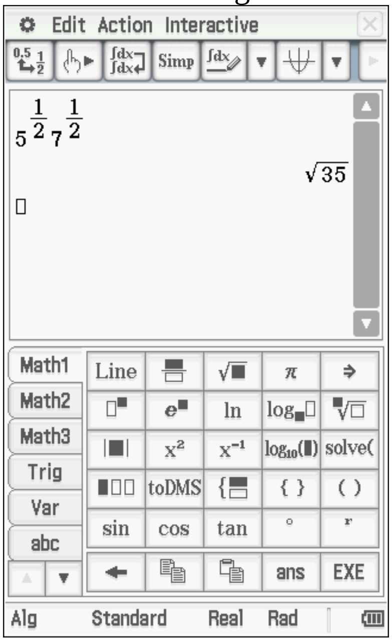
2.11 Kvadratrot og n-te rot


Regn ut: $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7} =$

Multiplikasjonstegn er ikke påkrevd.

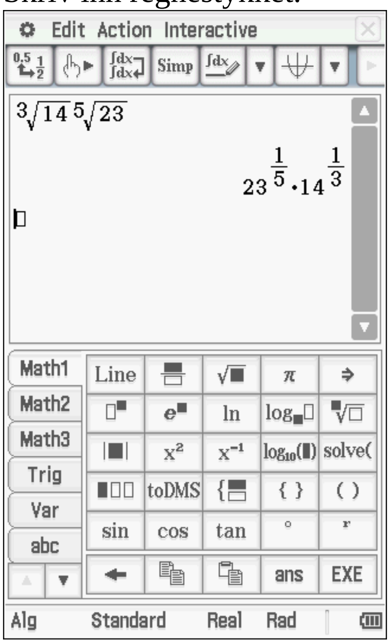


Viser sammenhengen mellom kvadratrot og potens.

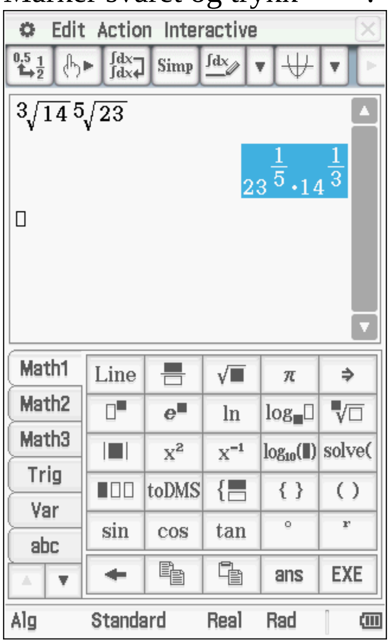



Regn ut: $\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[5]{23} =$

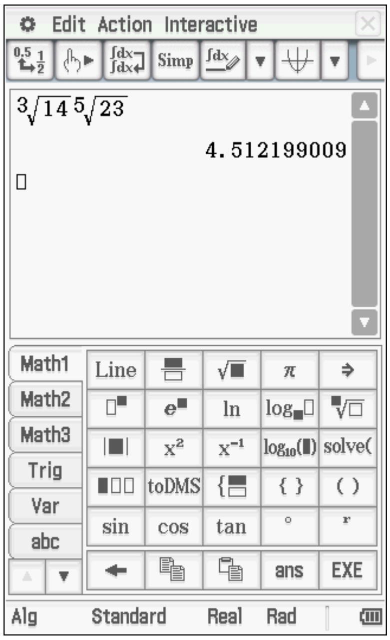
Skriv inn regnestykket.



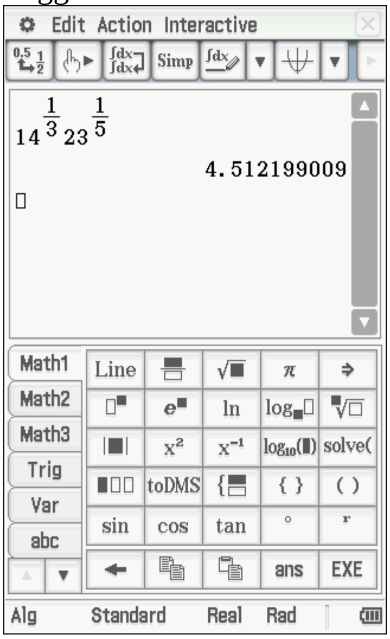
Marker svaret og trykk .



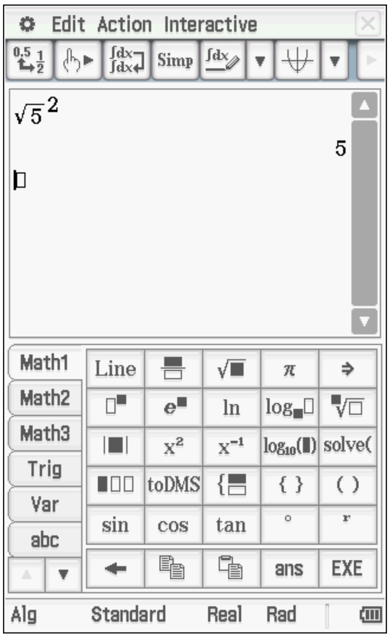
Svaret som desimaltall.



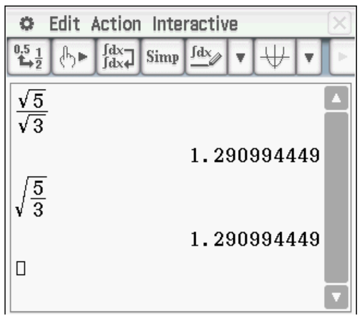
Legg merke til.



Merk at.

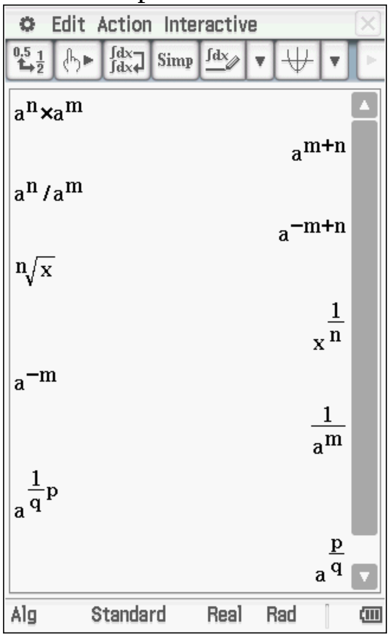


2.12 Regneregler og formler

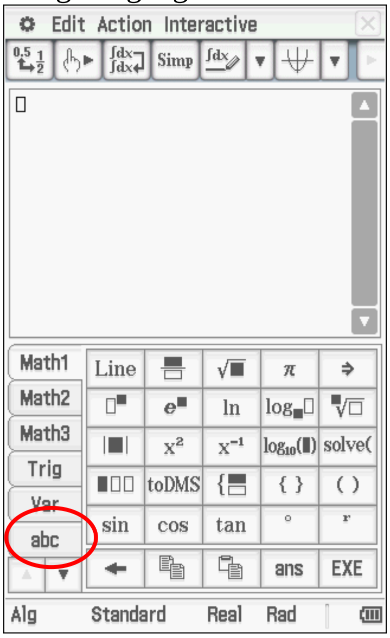
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $+(a+b)=a+b$ $-(a-b)=-a+b$ $-(-a)=a$	$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ $a^n:a^m=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
$a^0=1$ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ $=a^{\frac{1}{q}\cdot p}=a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$ $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	

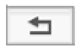
 Bruk fx-CP400 til å repetere reglene og formlene.

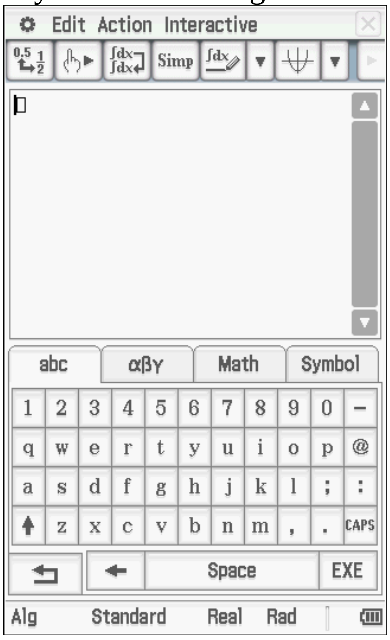
For eksempel.



abc gir tilgang til bokstavene.



Trykk  for å gå tilbake.

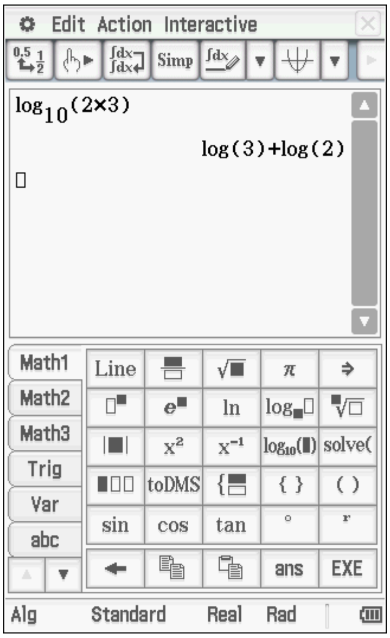


2.13 Logaritmer

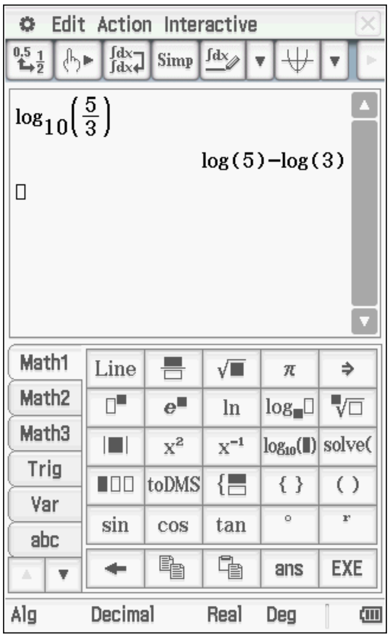
Logaritme med grunntall 10 Briggske logaritme	$10^{\lg x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \lg 10^x = x$	$x > 0$
Logaritmelikning	$\lg x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^c$	
Logaritmeregler: *a* og *b* er positive tall. Reglene gjelder for alle logaritmesystemer.	1) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$ 2) $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ 3) $\lg a^x = x \cdot \lg a$	Merk $\lg 3^2 = 2 \cdot \lg 3$ $(\lg 3)^2 = \lg 3 \cdot \lg 3$

 Verifiser de tre logaritmereglene. Sett for eksempel $a = 2$, $b = 3$ og $x = 4$.

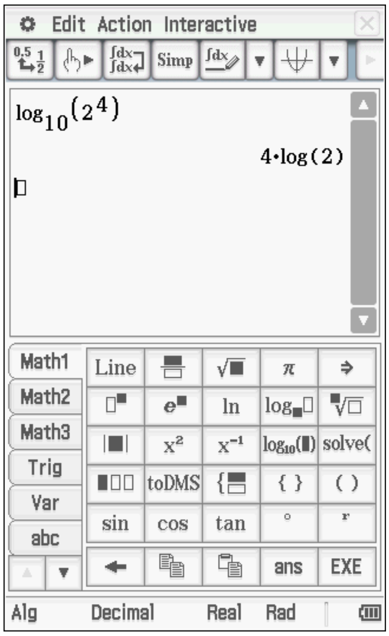
Regel 1.



Regel 2.

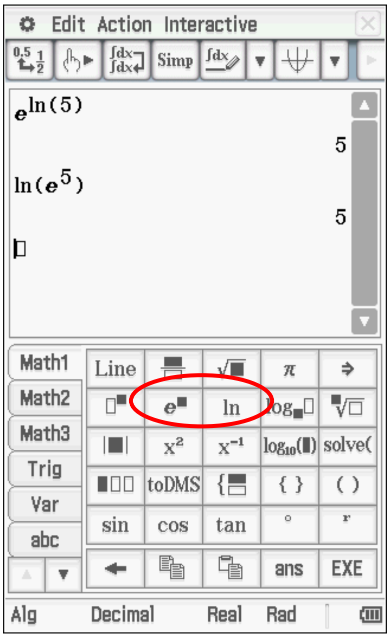


Regel 3.

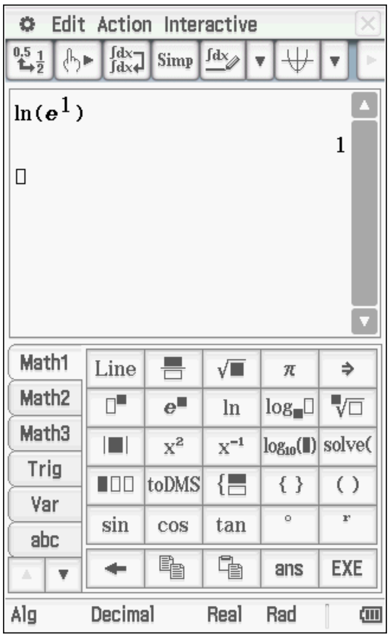


Verifiser at $e^{\ln x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \ln e^{x} = x$. Sett for eksempel $x = 5$.

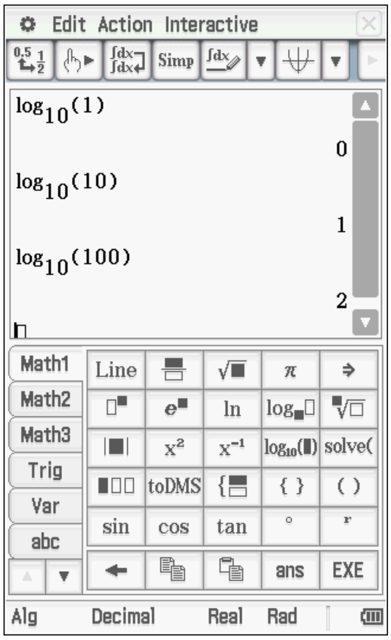
Løsning.



Merk.

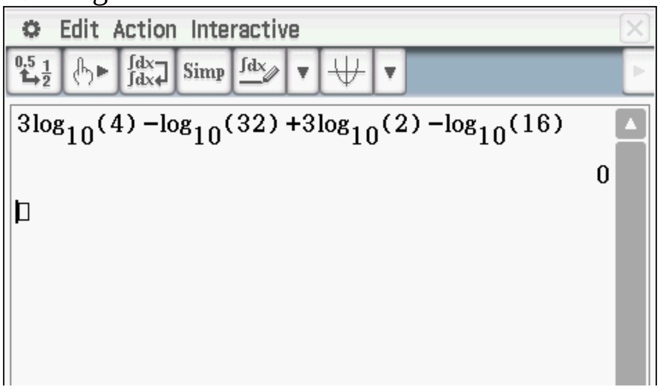


Hvorfor? Hva blir $\log 1000$?



Skriv så enkelt som mulig: $3\lg 4 - \lg 32 + 3\lg 2 - \lg 16$

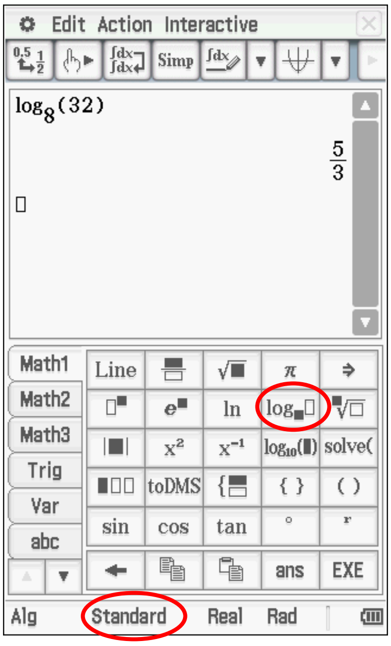
Løsning.



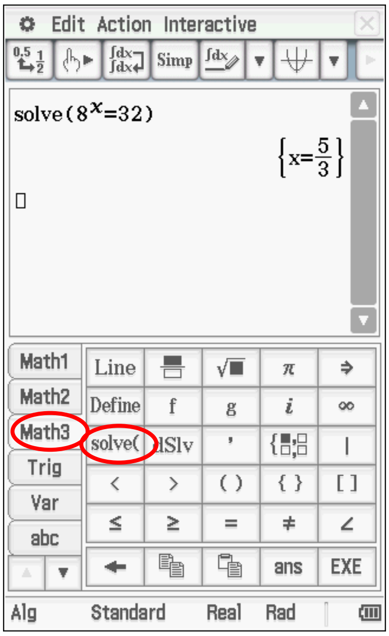
Forklar uten å bruke lommeregner hvorfor svaret blir lik null.

Regn ut $\log_8 32$

Innstillingen er Standard og vi får svaret som brøk.



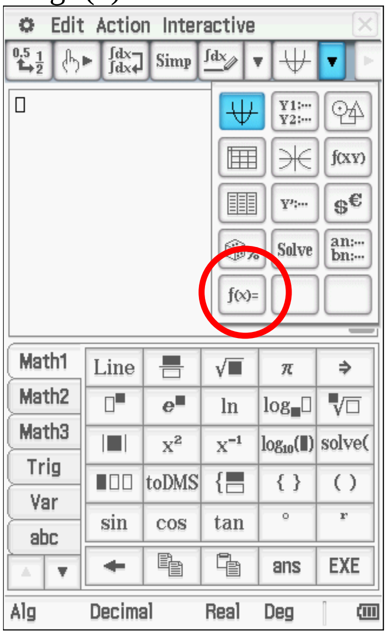
Hvorfor?



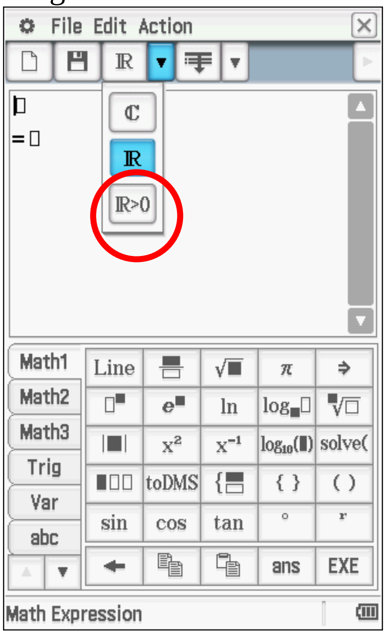
solve finner vi for eksempel i Math3

Undersøk om $\log_3(9xy) = 2 + \log_3(x) + \log_3(y)$. Prøv å vise uten lommeregner.

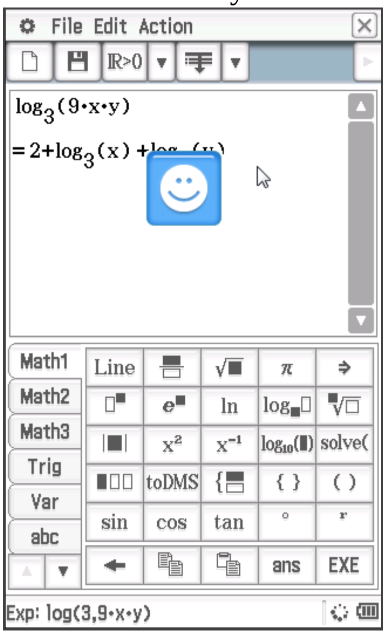
Velg f(x)=



Velg R>0.



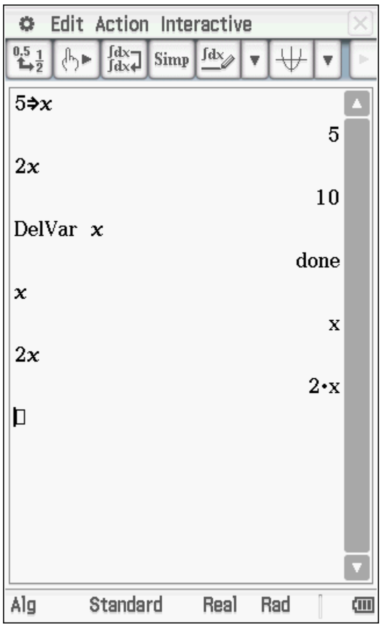
Skriv likheten. Trykk EXE.

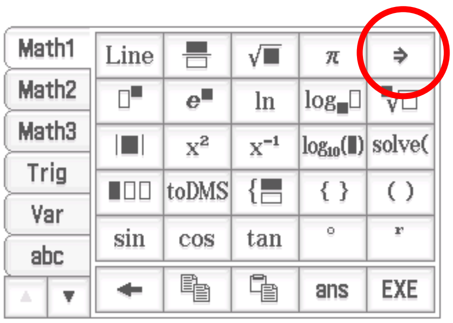


Smilefjes bekrefter likheten.

2.14 Tilordning og DelVar

Ved hjelp av "dobbelpil" kan vi tilordne verdier til bokstaver. Nedenfor ser vi hvordan vi "legger 5 inn i x". Da blir $2x$ selvfølgelig 10. Vi fristiller variabelen x ved hjelp av kommandoen DelVar.





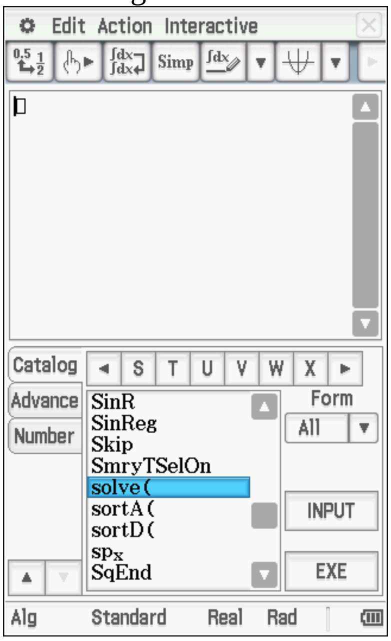
3. Likninger

Lommeregneren fx-CP400 kan løse likninger og likningssett på forskjellige måter.

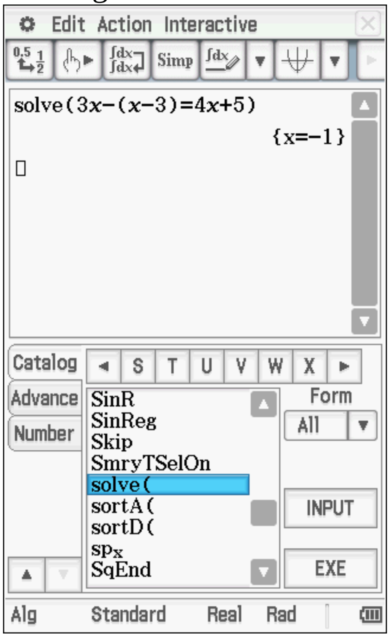
3.1 Enkle likninger

Løs likningen: $3x-(x-3)=4x+5$

Vi velger å hente kommandoen solve(fra Catalog.

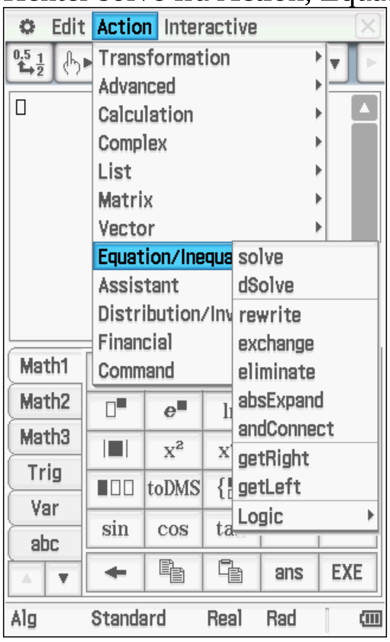


Løsning.

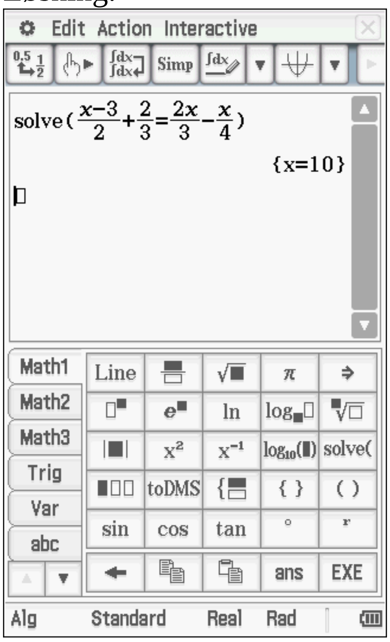


Løs likningen $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{4}$

Henter solve fra Action, Equation/Inequality



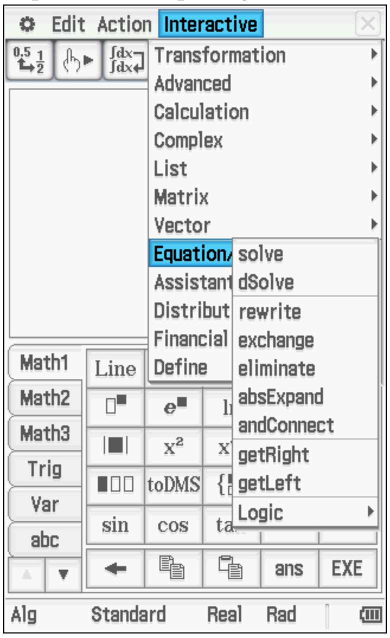
Løsning.



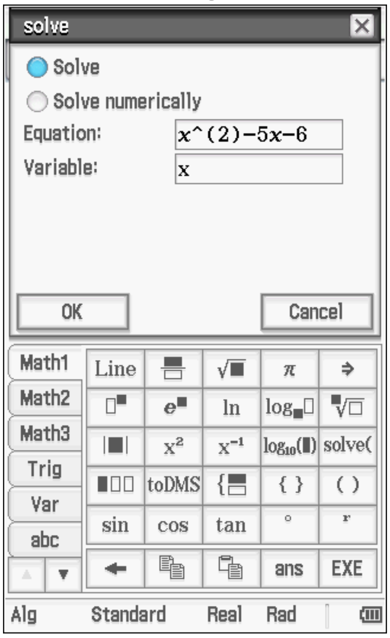
3.2 Andregradslikninger

Løs andregradslikningen: $x^2 - 5x - 6 = 0$

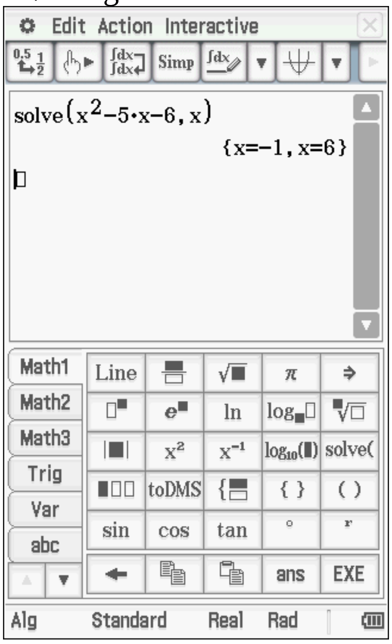
Henter solve fra Interactive, Equation/Inequality



Skriv inn likningens venstre side.



Løsning.

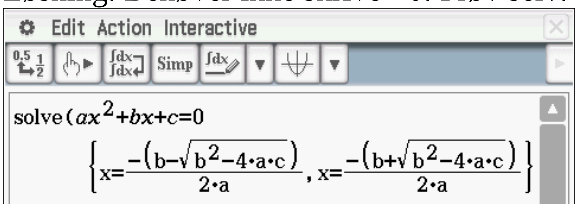


Kommentar:

Den generelle andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsning $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Løs den generelle andregradslikningen: $ax^2 + bx + c = 0$.

Løsning. Behøver ikke skrive =0. Prøv selv.



Vis at

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

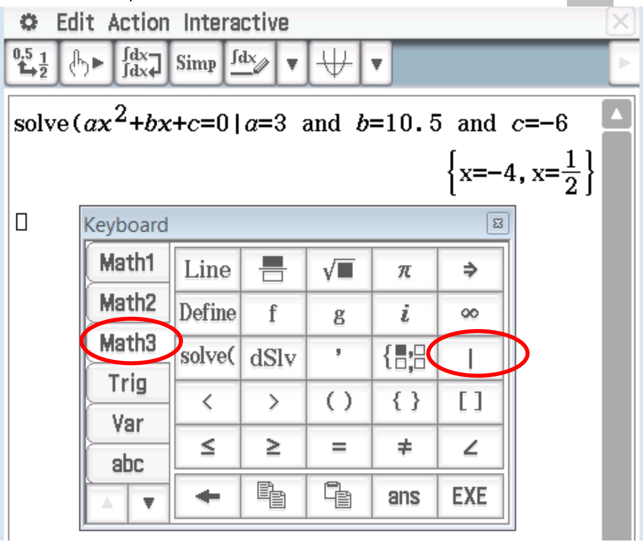
og at

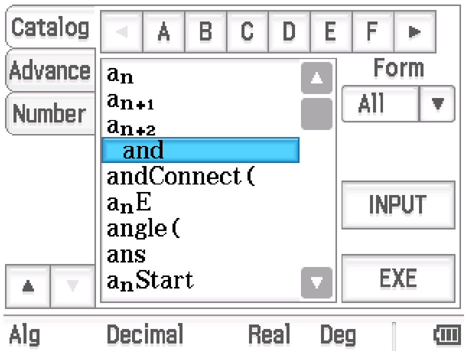
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Løs andregradslikningen: $3x^2 - 10,5x - 6 = 0$

Merknad: Likningen i oppgaven er ordnet på abc-form.

Vi finner | (gitt at) i Math3 og kommandoen and i Catalog. Merk mellomrommene.

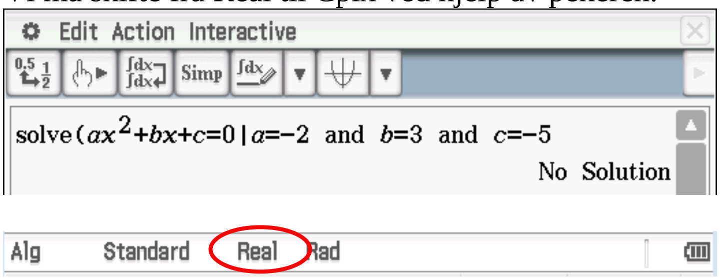


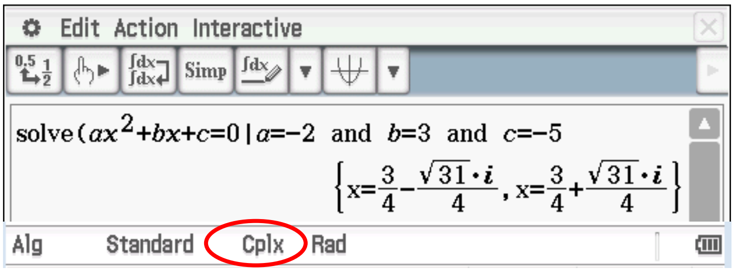


3.3 Andregradslikninger med kompleks løsning

Løs andregradslikningen: $-2x^2 + 3x - 5 = 0$

Vi må skifte fra Real til Cplx ved hjelp av pekeren.

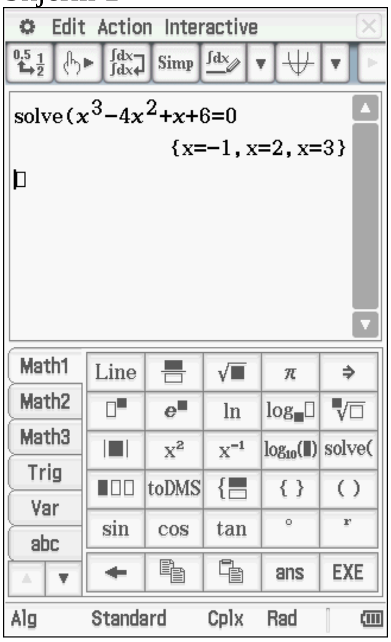




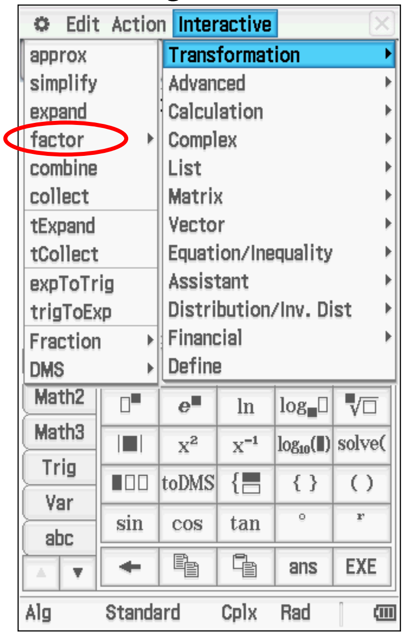
3.4 Tredjegradslikninger

Løs tredjegradslikningen: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

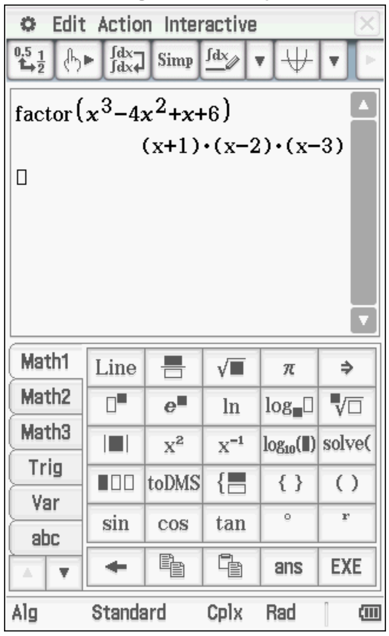
Skjerm 1



Vi kan løse likningen ved hjelp faktorisering.



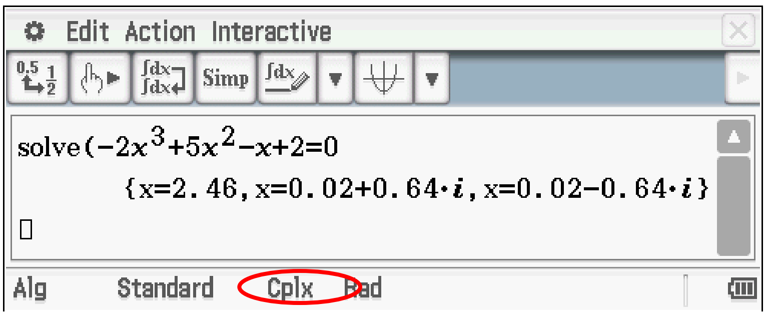
Sammenlign med skjerm 1.



En tredjegradslikning kan for eksempel ha en reell rot og to komplekse røtter. Se oppgaven nedenfor.

Løs tredjegradslikningen: $-2x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$

Dersom fx-CP400 er i Real-mode, får vi kun $x = 2{,}46$ til svar.

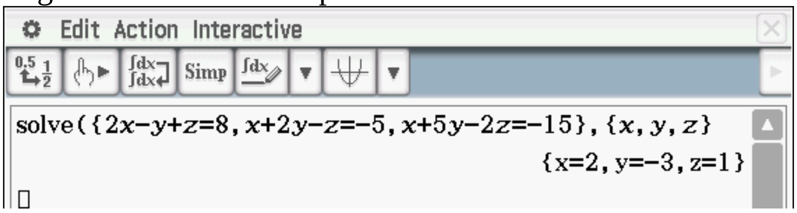


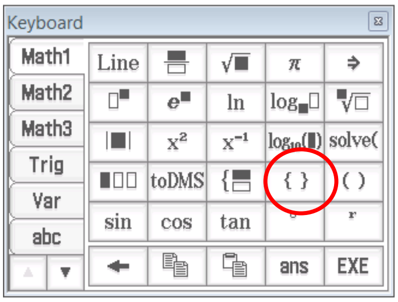
3.5 Likningssett med flere ukjent


Løs likningssettet:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 8 \\ x + 2y - z &= -5 \\ x + 5y - 2z &= -15 \end{aligned}$$

Leg merke til bruken av parenteser.



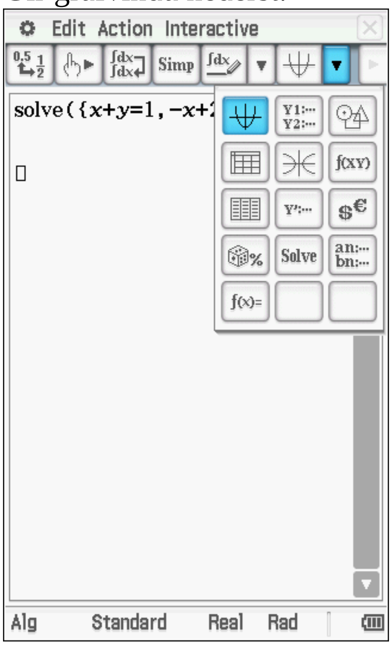


Finnes både i Math1 og Math3.

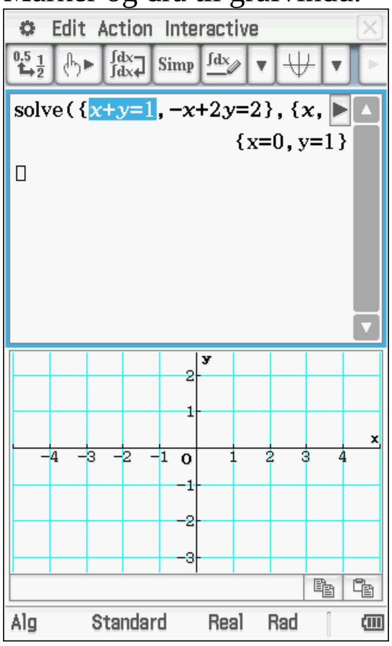

Løs likningssettet:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ -x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

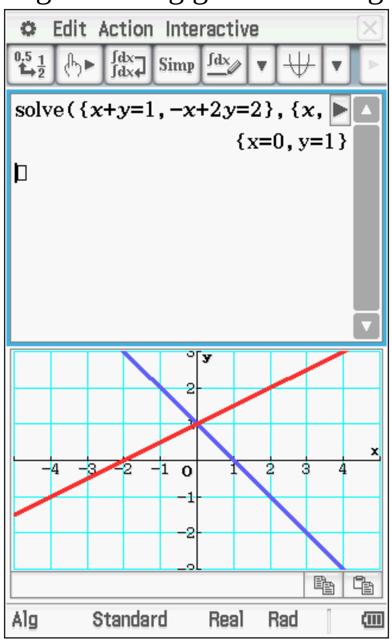
Gir grafvindu nederst.



Marker og dra til grafvindu.

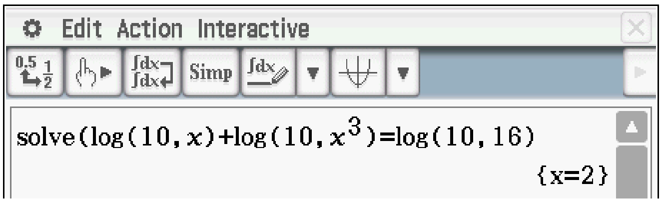


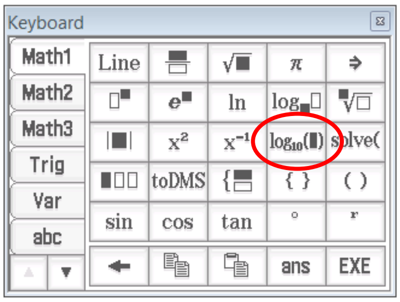
Algebraisk og grafisk løsning.



3.6 Logaritmelikninger

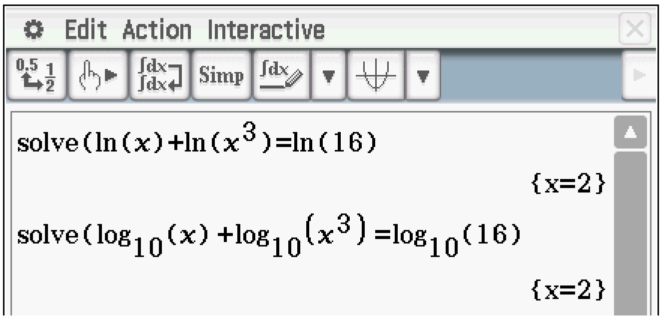
Løs logaritmelikningen: $\lg x + \lg x^3 = \lg 16$





Kontroll: $V.S.\ \lg 2 + \lg 2^3 = \lg 2 + 3\lg 2 = 4\lg 2 \qquad H.S.\ \lg 16 = \lg 2^4 = 4\lg 2$

Alternativt.



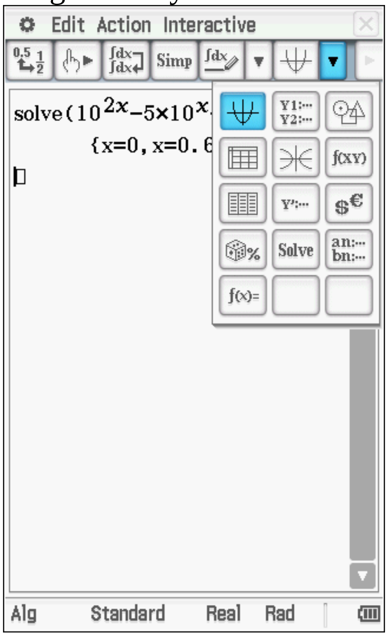
Merk at vi må utelukke $x \le 0$ når vi løser logaritmelikninger.

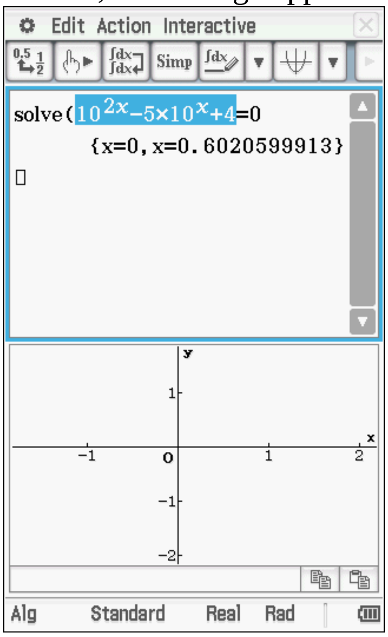
3.7 Eksponentiallikninger

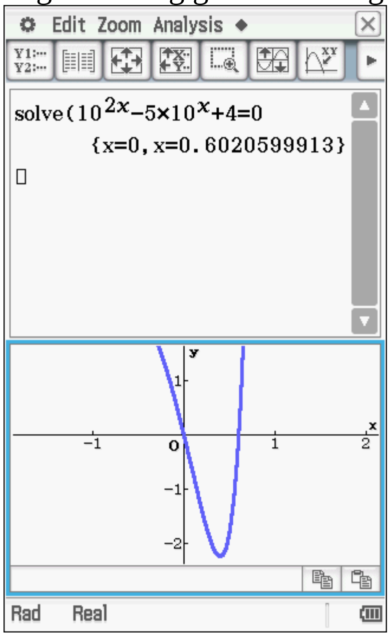
Eksponentiallikning	$a^x = b \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{\lg b}{\lg a}$ $a > 0$ og $b > 0$	Merk $a^n = a^m \;\Rightarrow\; n = m$ $10^x = a \;\Leftrightarrow\; x = \lg a$

Løs likningen: $10^{2x} - 5 \cdot 10^x + 4 = 0$

Velg ved å trykke. Marker, dra ned og slipp. Algebraisk og grafisk løsning







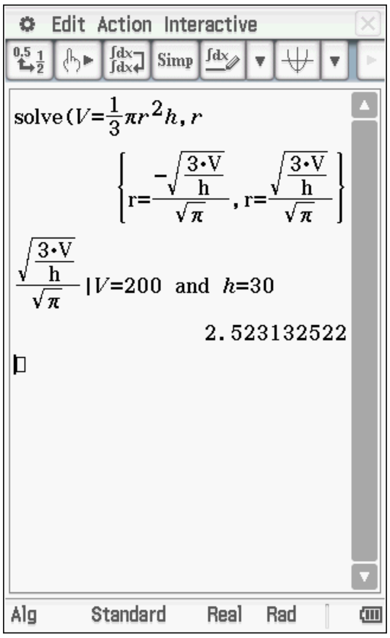
3.8 Arbeid med en formel

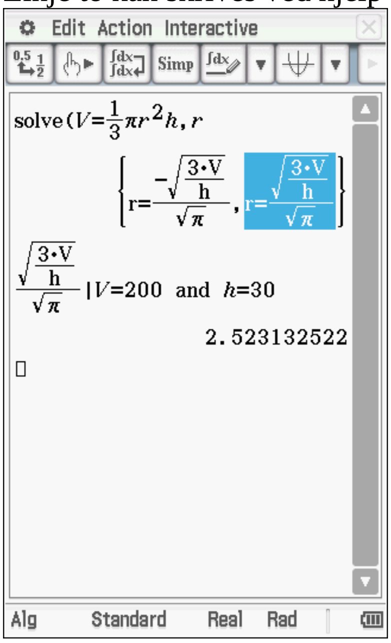
Regn ut radius i en kjegle med volum $V = 200 \text{ cm}^3$ og høyde $h = 30 \text{ cm}$.

Formelen for volumet av en kjegle er $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Vi finner et uttrykk for r.
Legg merke til komma bak formelen.

Linje to kan skrives ved hjelp av markering, dra og slipp.





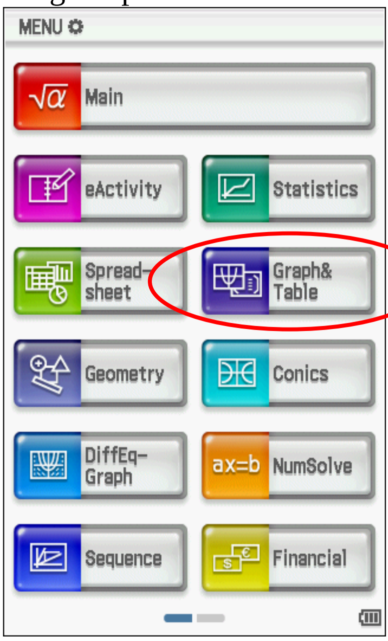
Radius i kjeglen er tilnærmet lik 2,52 cm.

4. Funksjoner og grafer

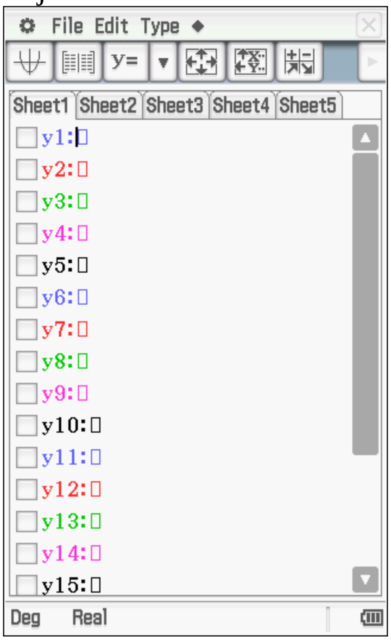
4.1 Legge inn funksjoner og tegne grafer

Legg inn funksjonen *f* gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ og tegn grafen.

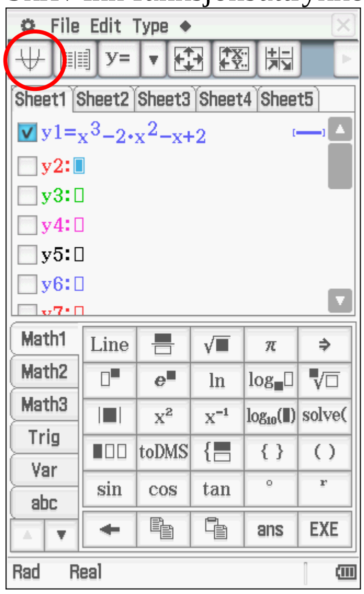
Velg Graph & Table i hovedmenyen.



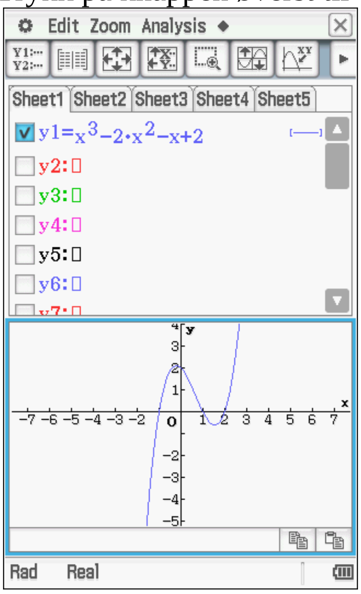
Skjerm.



Skriv inn funksjonsuttrykket.

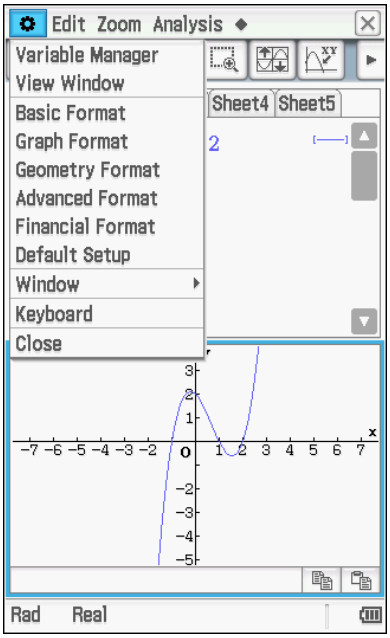


Trykk på knappen øverst til venstre.

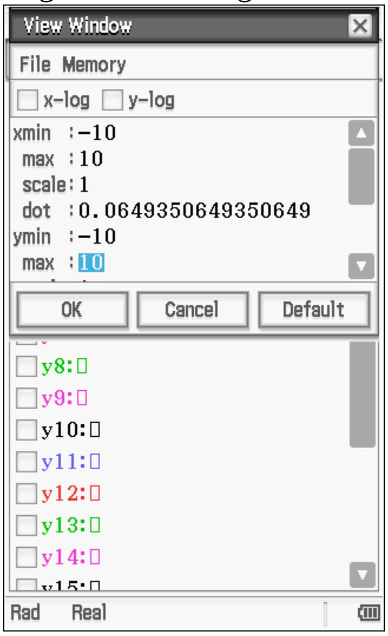


Det er ikke sikkert at din graf ser ut slik. Kanskje du ikke ser en graf i hele tatt. Det betyr at vi må justere visningsvinduet.

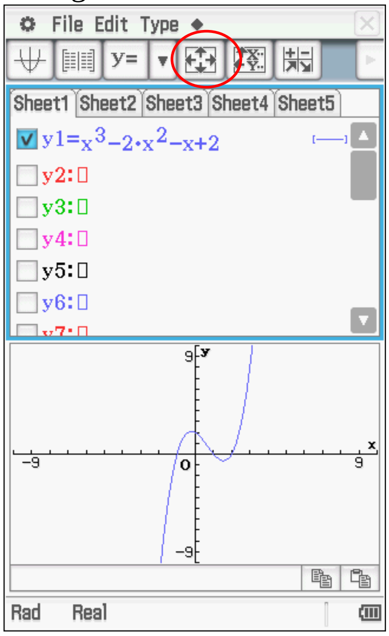
Velg View Window.



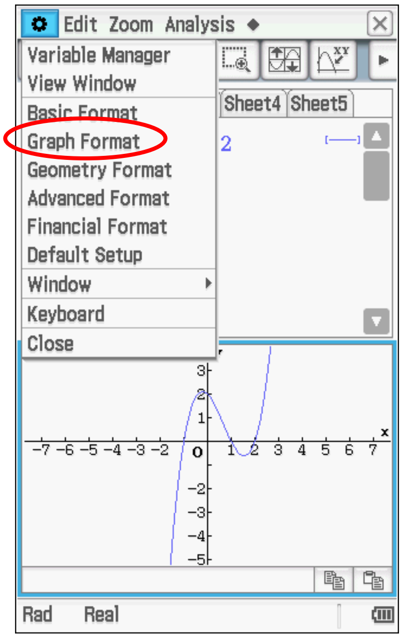
Vi kan for eksempel velge følgende innstilling.



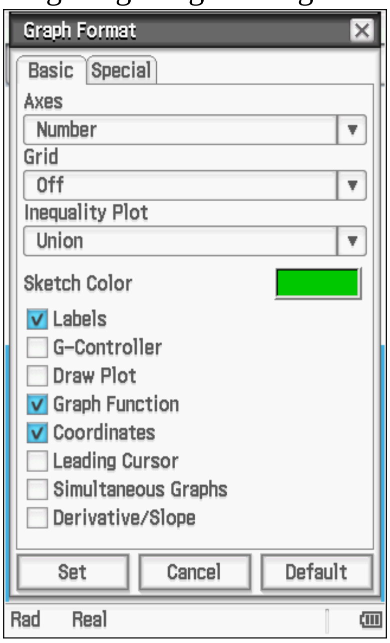
Gir også View Window.



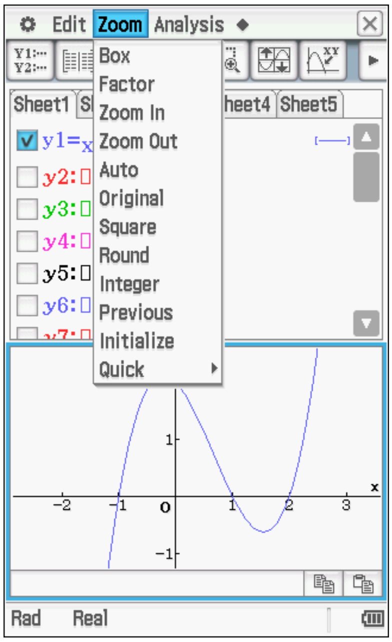
I Graph Format kan vi for eksempel velge Grid On og Labels off, eller gjøre andre valg etter behov.



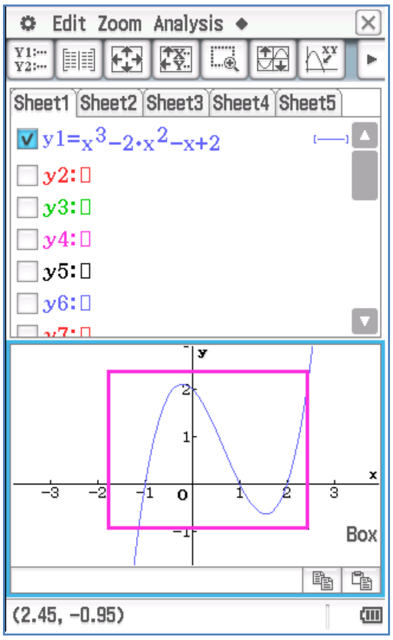
Fargevalg er også mulig.



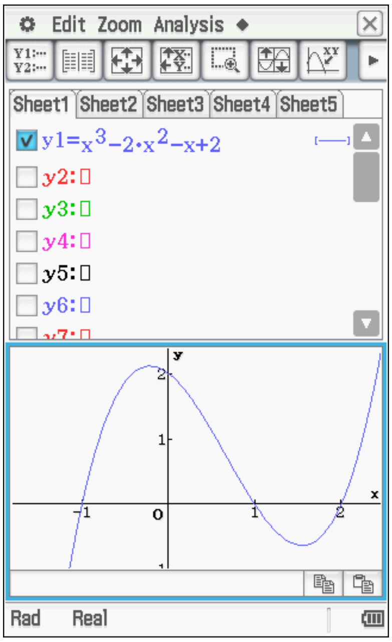
Utforsk Zoom.



Her har vi valgt Box for å zoome inn.



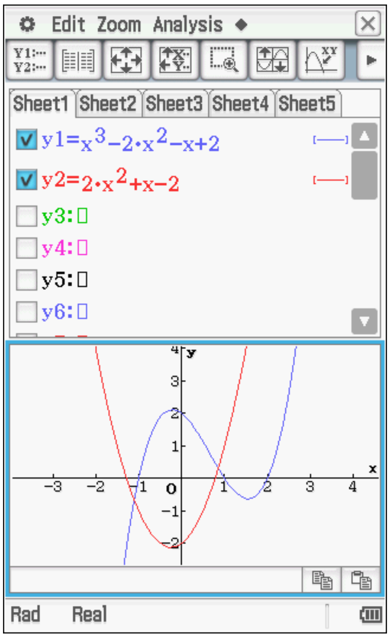
Øv på å zoome inn og ut.

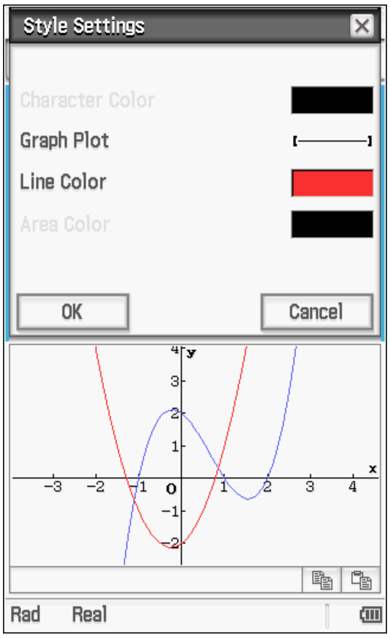


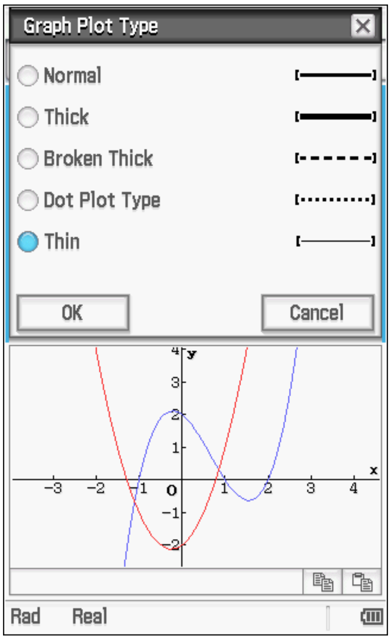
Du får tilbake det opprinnelige bildet ved å velge Original.

Tegn grafen til f og g gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ og $g(x) = 2x^2 + x - 2$ i samme koordinatsystem.

Velg Graph & Table i hovedmenyen.
Legg inn funksjonsuttrykket i $y2$.

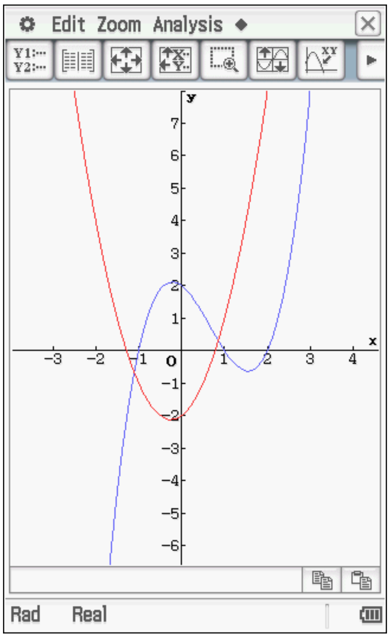




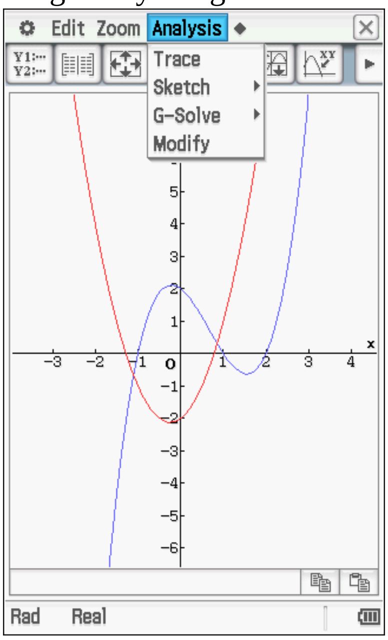


Her ser vi hvor lett det er å skille grafene ved hjelp av fargene. Vi skifter farge og tykkelse på grafen ved å peke på den fargede streken til høyre for funksjonsuttrykket.

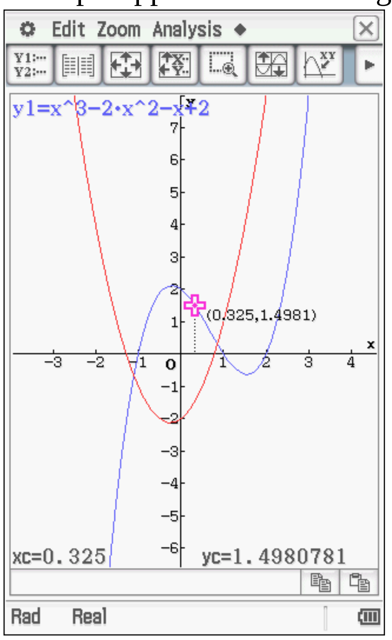
Trykk Resize for få grafene i hele vinduet.



Velg Analysis og Trace.



Bruk pil opp/ned for å skifte graf.



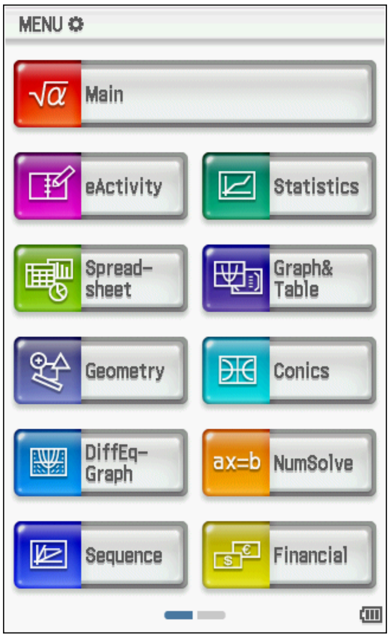
Bruk piltastene som peker mot høyre og venstre til å flytte markøren. Vi kan lese av sammenhørende verdier for *x* og *y*.

4.2 Tabell

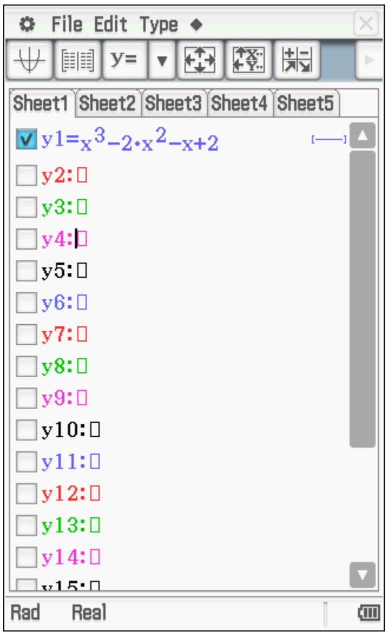
Dersom vi skal tegne en graf for hånd, bør vi bruke en tabell som viser sammenhørende *x*-verdier og *y*-verdier. En slik tabell kan vi skaffe oss ved hjelp av lommeregneren.

 Lag en tabell for sammenhørende *x*-verdier og *y*-verdier for $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

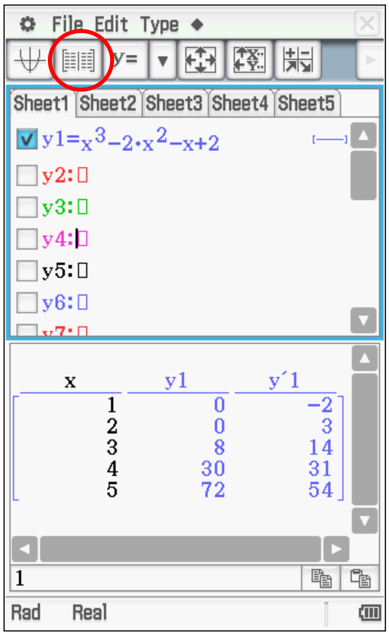
Velg Graph & Table.



Skriv inn funksjonsuttrykket.

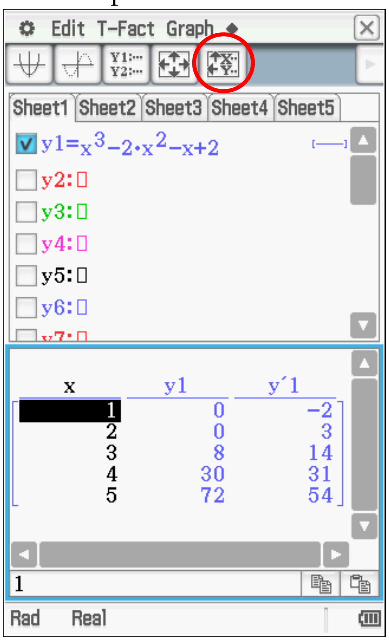


Trykk på knappen for tabell.

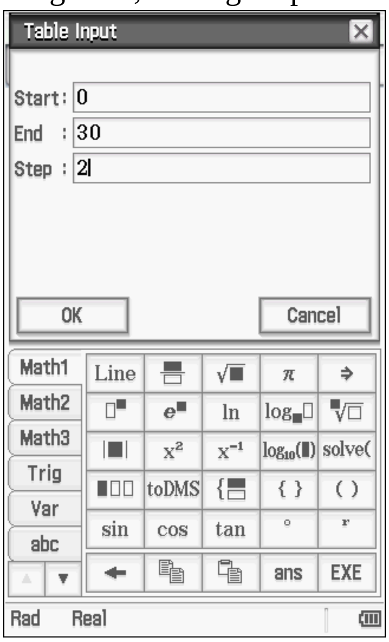


Det er ikke sikkert at tabellen som du får fram, ser likedan ut. Det avhenger av hvilken Table Input som gjelder på lommeregneren.

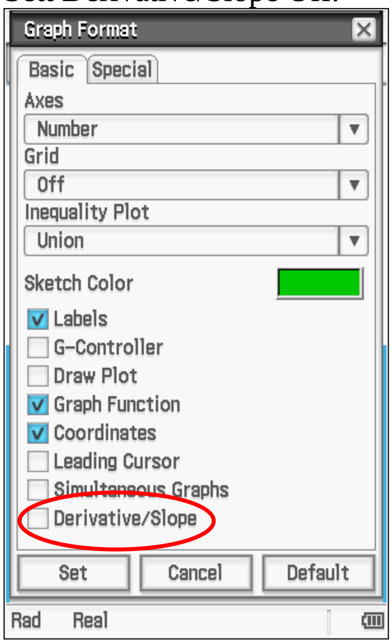
Trykk på knappen for Table Input.



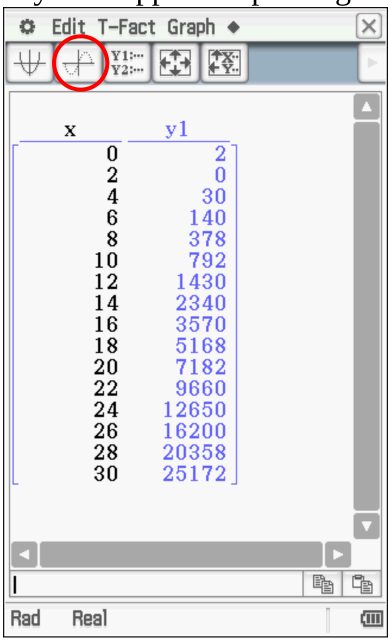
Velg Start, End og Step.



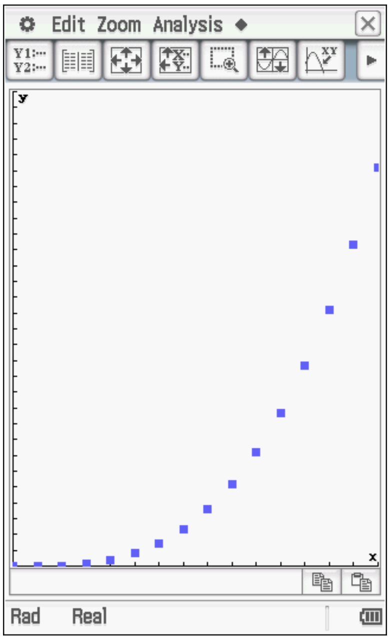
Sett Derivative/Slope Off.



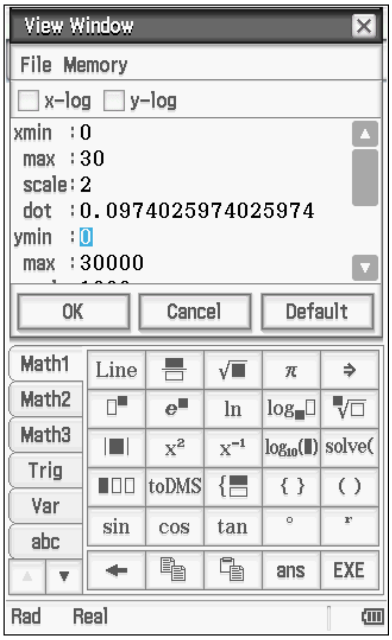
Tabellen ser da slik ut.
Trykk knappen for plotting.



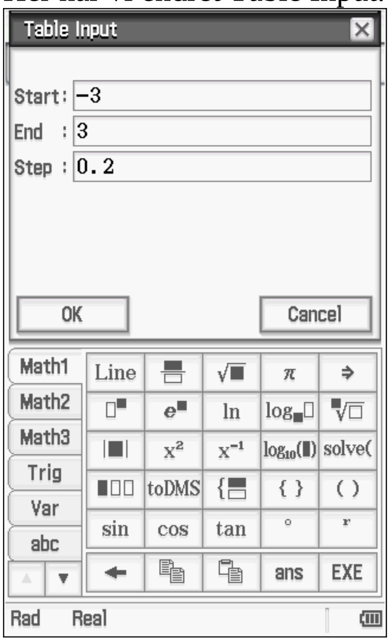
Resultat.



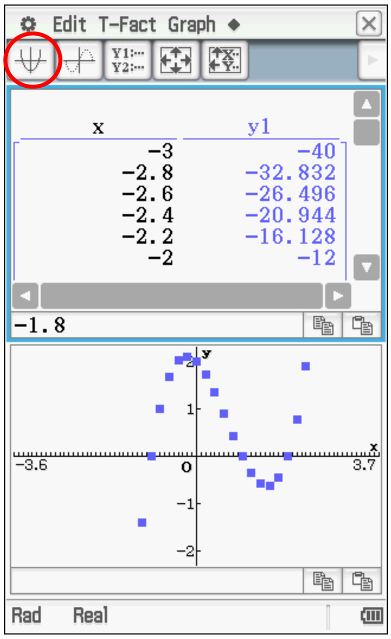
View Window.



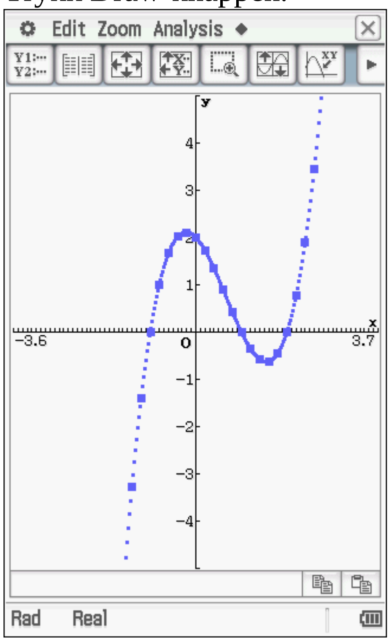
Her har vi endret Table Input.



Resultat.



Trykk Draw-knappen.



4.3 Punkt på grafen, nullpunkt, topp- og bunnpunkt

a) Legg inn funksjonen *f* gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ og tegn grafen.

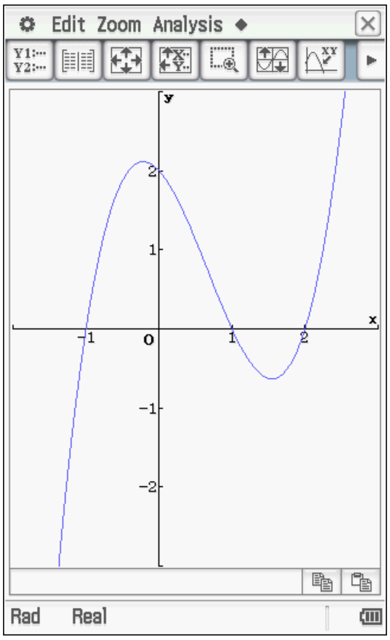
b) Bestem $f(2{,}5)$

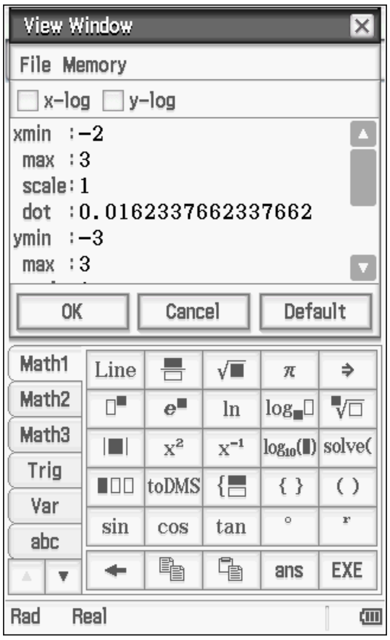
c) Bestem *x* når $f(x) = -12$

d) Bestem eventuelle nullpunkter på grafen til *f*.

e) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

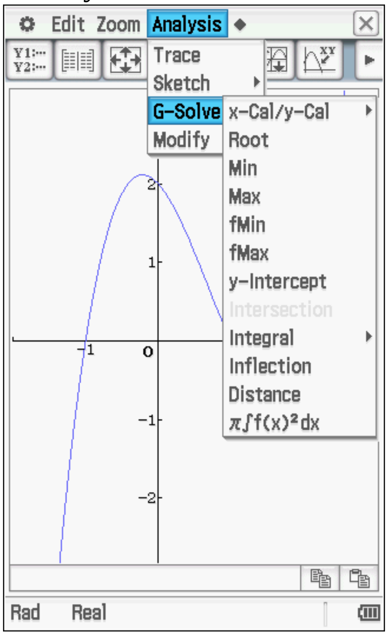
a)
Viser til avsnitt 4.1 og arbeider videre med grafen på følgende skjerm. Bruk gjerne samme vindu som vist til høyre.



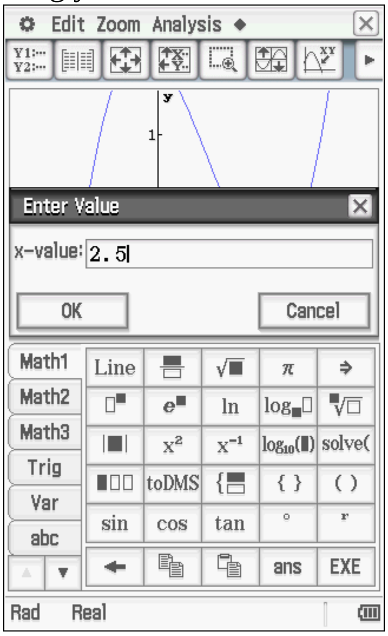


b)

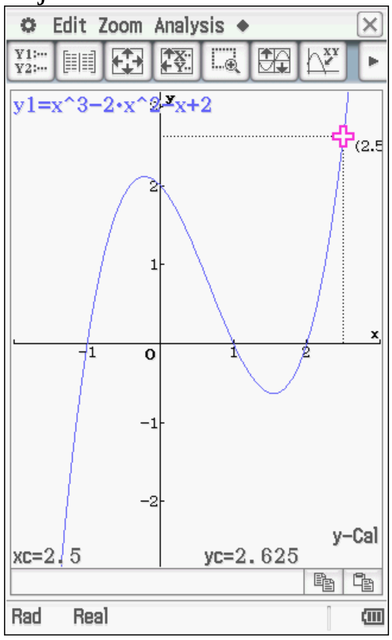
Velg Analysis, G-Solve, x-Cal/y-Cal.



Velg y-Cal. Skriv inn x-verdien.

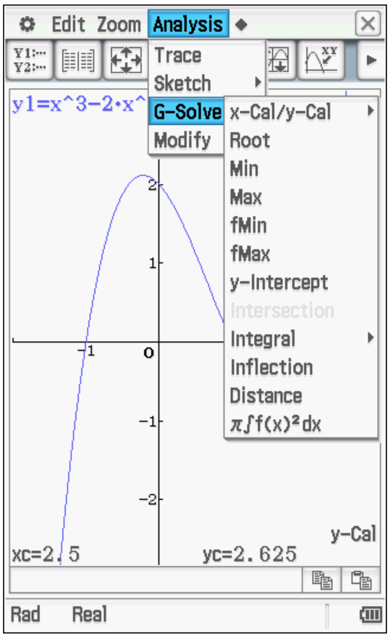


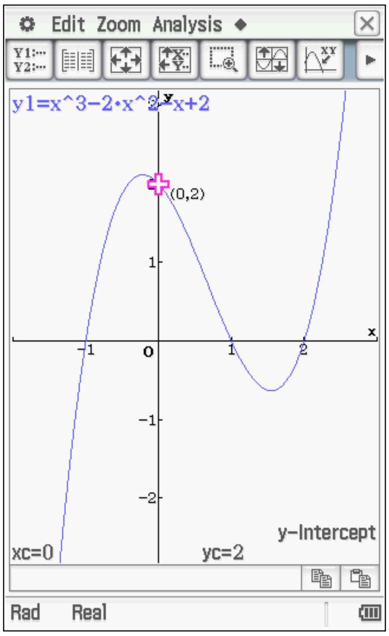
Skjerm.



Svar: $f(2{,}5)=2{,}625$

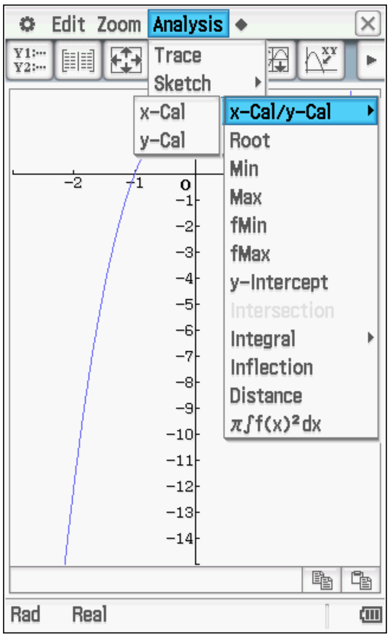
Kommentar:
Vi kan selvfølgelig bestemme skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen ved å bruke y-Cal. Men istedenfor å sette $x=0$, velger vi å benytte y-Intercept.

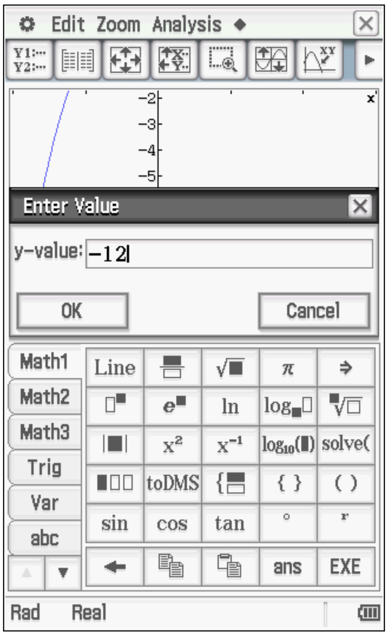


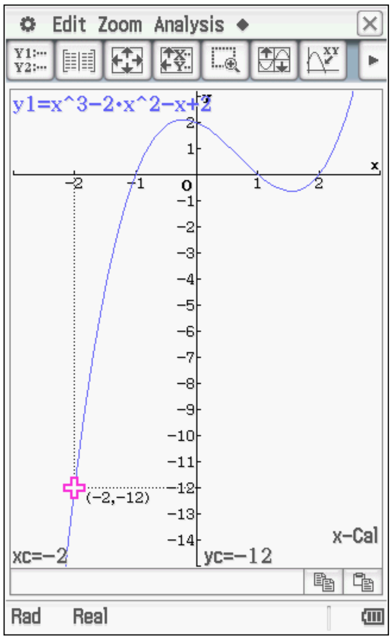


Skjæringspunktet på y-aksen er altså $(0,2)$.

c)
Analysis, G-Solve og x-Cal. Skriv inn x-verdi. Trykk OK. Vi har tilpasset View Window.



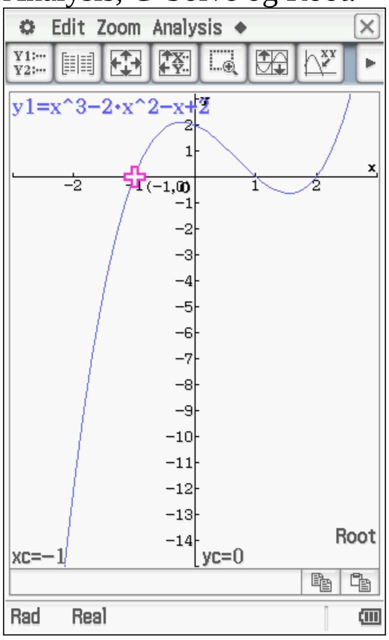


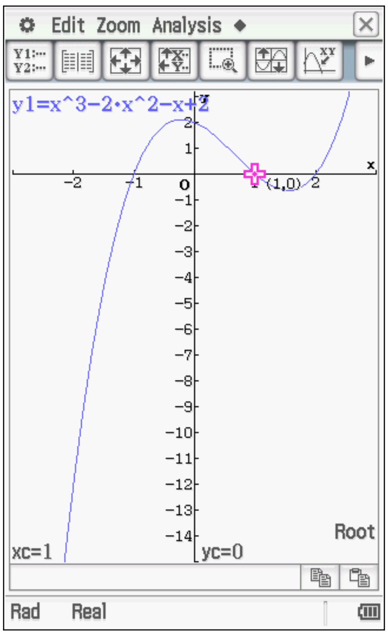


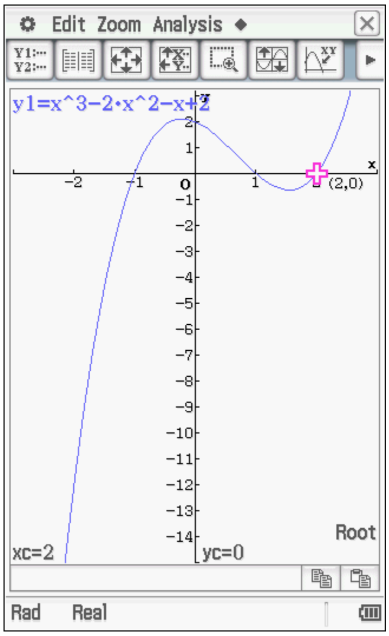
Svar: $x = -2$ når $f(x) = -12$.

d)

Analysis, G-Solve og Root.





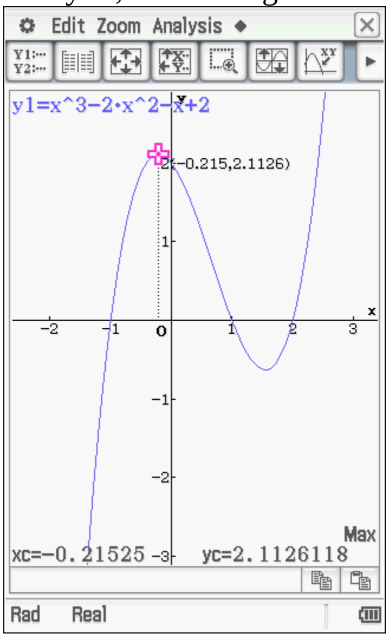


Vi finner de neste nullpunktene ved å trykke pil som peker mot høyre.
Svar: Nullpunktene på grafen til *f* er $(-1,0), (1,0)$ og $(2,0)$.

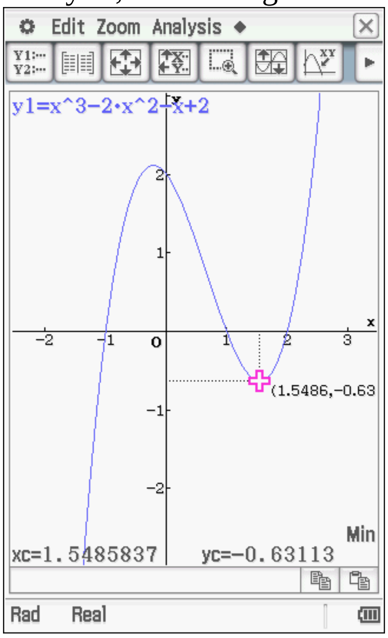
Kommentar:
Vi kan løse likningen $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ grafisk ved å bestemme nullpunktene på grafen til *f* gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
Altså: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\; x = 1$ og $x = 2$. Les mer om grafisk løsning av likninger i avsnitt 4.5.

e)

Analysis, G-Solve og Max.



Analysis, G-Solve og Min.

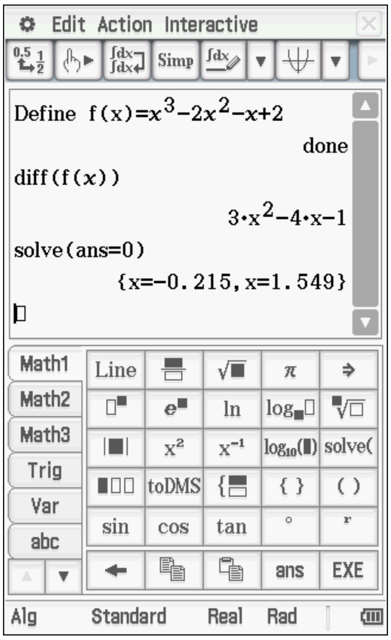


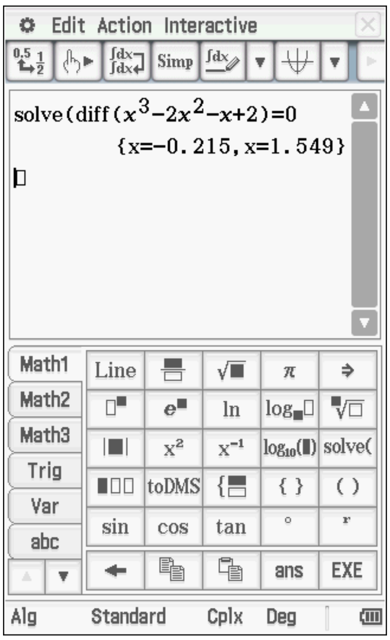
Grafen til f har toppunkt $(-0{,}215, 2{,}113)$ og bunnpunkt $(1{,}549, 0{,}631)$.

Merk:

Dersom en graf har flere toppunkt eller bunnpunkt, må vi trykke pil som peker mot høyre for å få fram koordinatene.

Kontroll:



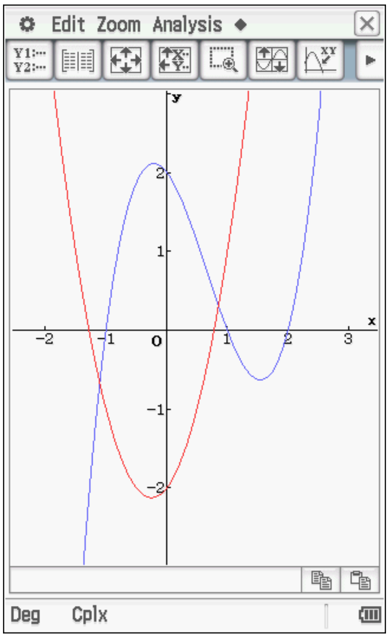


Altså: $f'(x) = 0$ for $x = -0{,}215$ og $x = 1{,}549$.

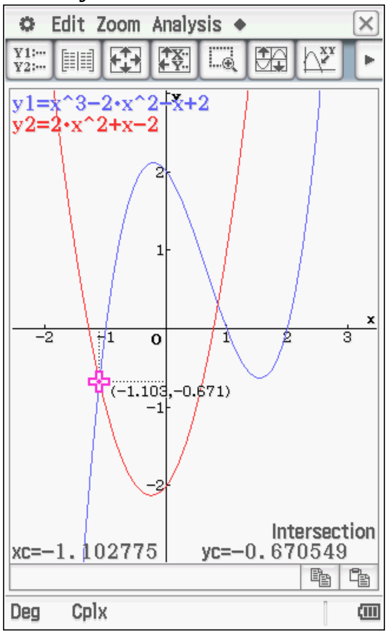
4.4 Skjæringspunkt mellom grafer

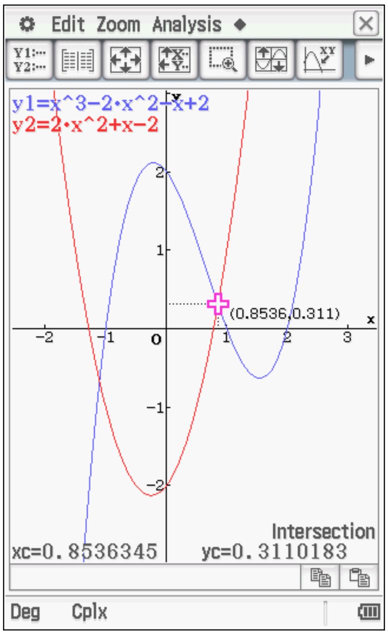
Tegn grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
Tegn grafen til *g* gitt ved $g(x) = 2x^2 + x - 2$ i samme koordinatsystem.
Bestem eventuelle skjæringspunkt mellom de to grafene.

Analysis, G-Solve og Intersection.



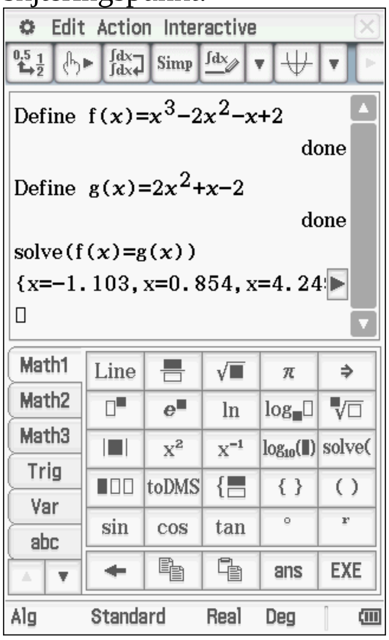
Pil høyre for neste.



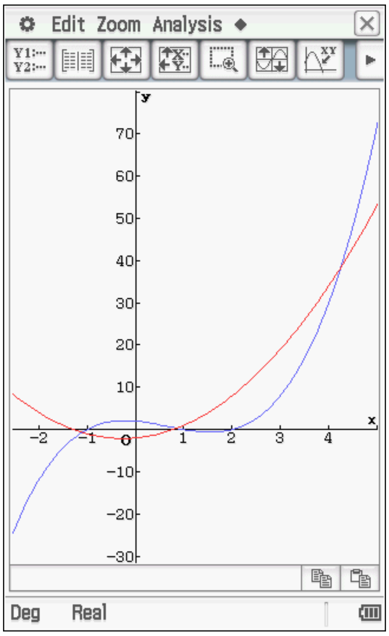


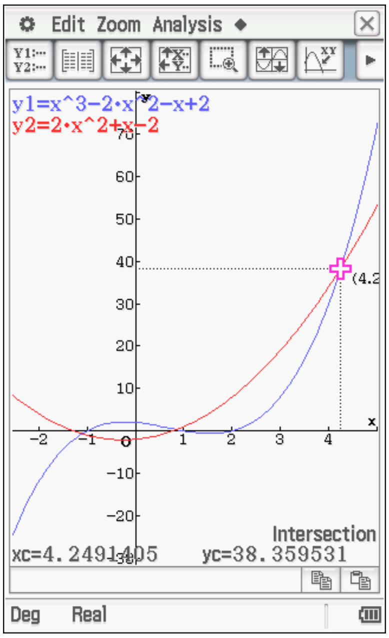
Svar: Skjæringspunkt mellom grafene er $(-1{,}103, -0{,}671)$ og $(0{,}854, 0{,}311)$.
Kommentar:
Vi kan kontrollere den grafiske løsningen ved å løse likningen $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 2x^2 + x - 2$.

Det finnes et tredje skjæringspunkt.



Utvider vinduet.





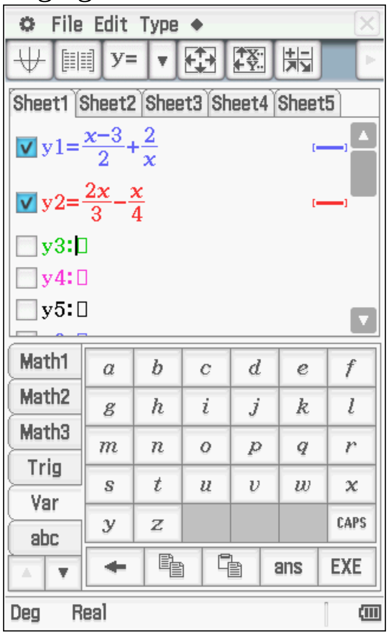
Det eksisterer altså et skjæringspunkt til i tillegg til de to punktene vi først fant grafisk.
Vi må utvide aksene i positiv retning for å oppdage dette skjæringspunktet i koordinatsystemet.

Det tredje skjæringspunktet har x-verdi lik 4,249.

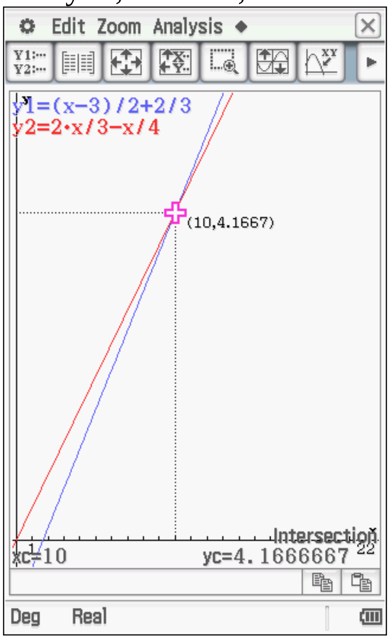
4.5 Grafisk løsning av likninger

Først bruker vi Intersection til å løse en enkel likning.
I kapitel 3 løste vi likningen $\frac{x-3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x}{3}-\frac{x}{4}$ i Main. Denne likningen kan også løses grafisk. Vi legger venstre side av likningen inn som funksjonen y1 og høyre side inn som y2.

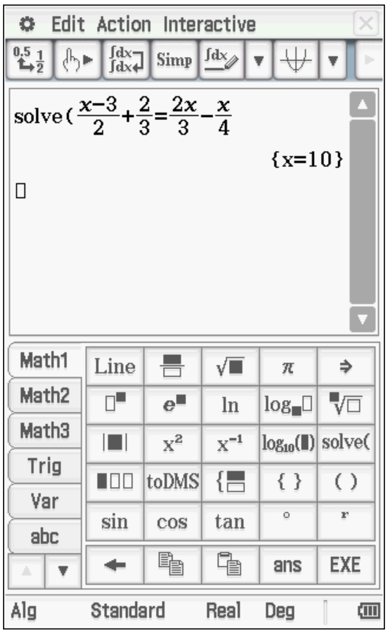
Merk av begge funksjonene.
Tegn grafene.



Tilpass View Window.
Analysis, G-Solve, Intersection.



Kontroll.

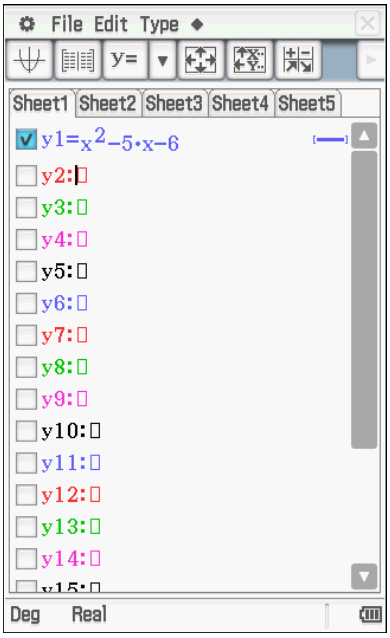


Likningen $\frac{x-3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x}{3}-\frac{x}{4}$ har altså løsning $x=10$.

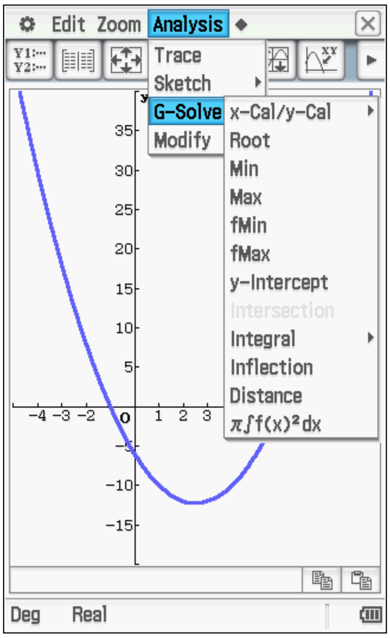
Løs andregradslikningen: $x^2-5x-6=0$

I denne oppgaven benytter vi Root for å løse likningen.

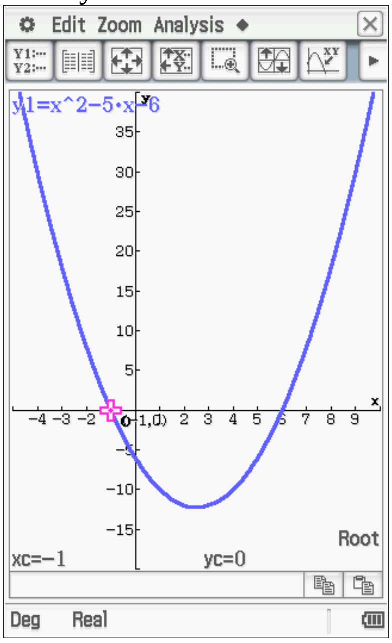
Skriv inn funksjonsuttrykket.

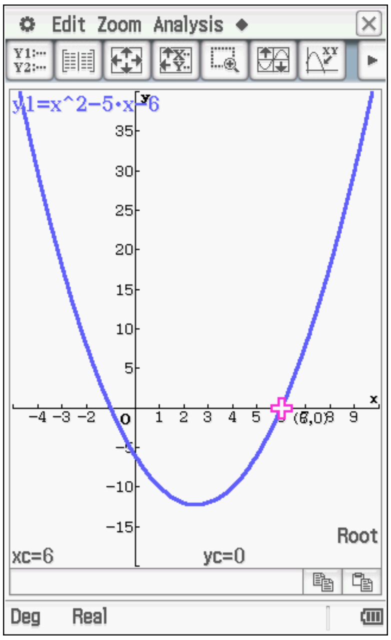


Analysis, G-Solve, Root.

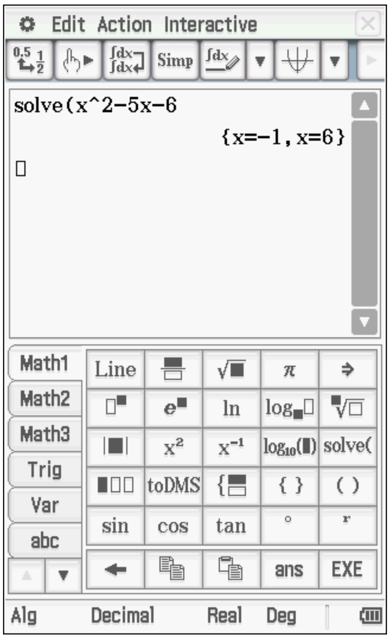


Pil høyre for neste Root.





Kontroll.



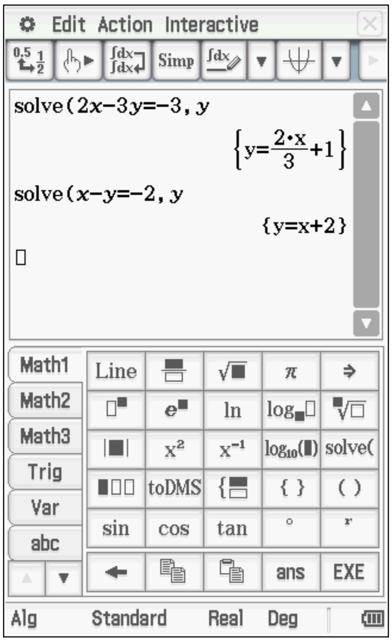
Andregradslikningen $x^2 - 5x - 6 = 0$ har altså løsning $x = -1$ og $x = 6$.


Løs likningssettet grafisk

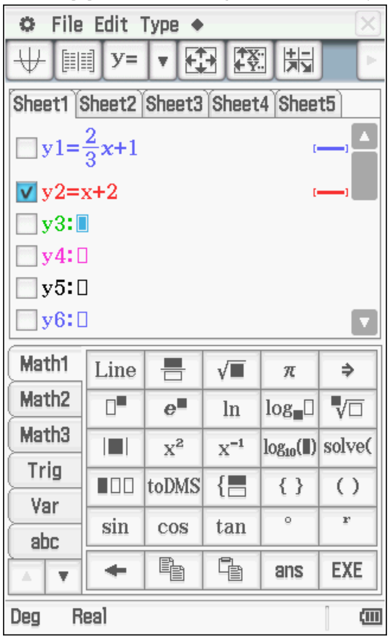
$$2x - 3y = -3$$
$$x - y = -2$$

Først må vi omforme likningene slik at de kommer på formen $y = ax + b$.

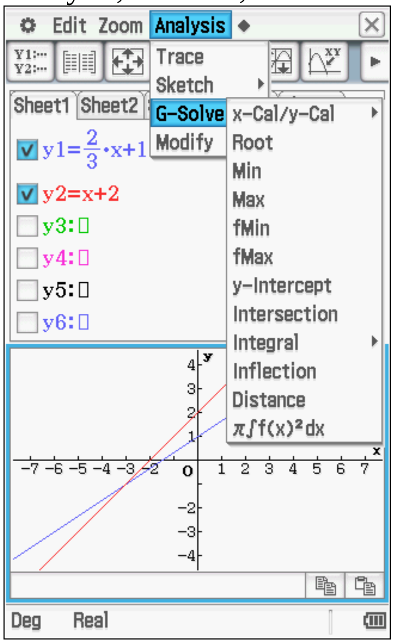
Da får vi.

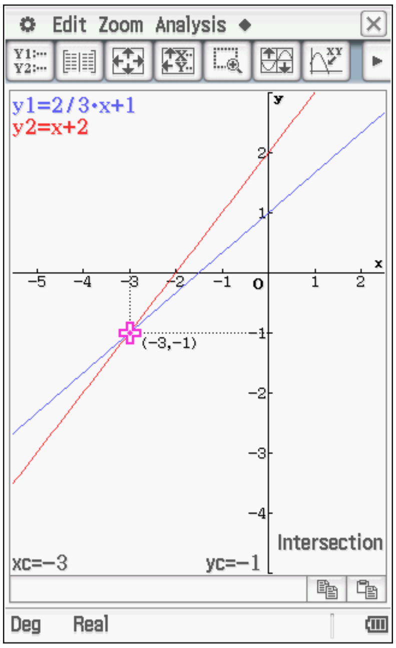


Vi legger inn uttrykkene for *y*.

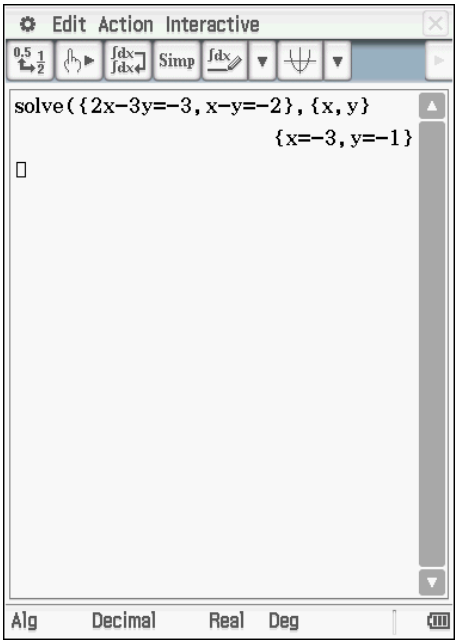


Analysis, G-Solve, Intersection.





Kontroll.



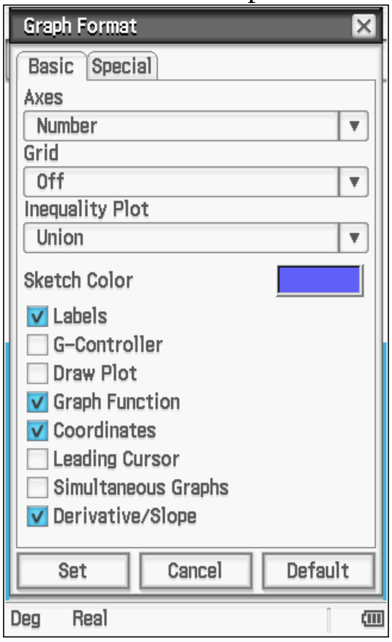
Likningssettet har løsningen $x = -3$ og $y = -1$.

Øv på grafiske løsninger av enkle likninger, andregradslikninger, tredjegradslikninger, eksponentiallikninger, logaritmelikninger og likninger med to ukjente.

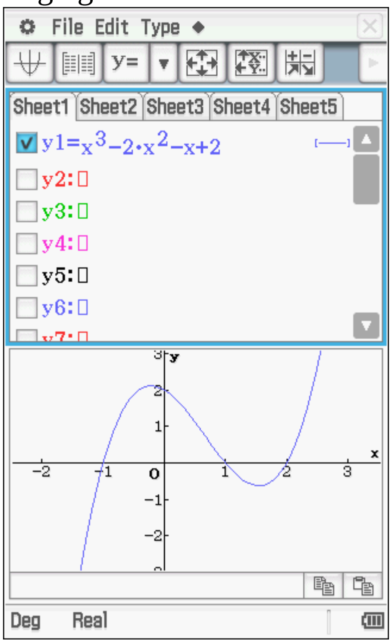
4.6 Derivert og andrederivert


Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Bestem $f'(2)$.

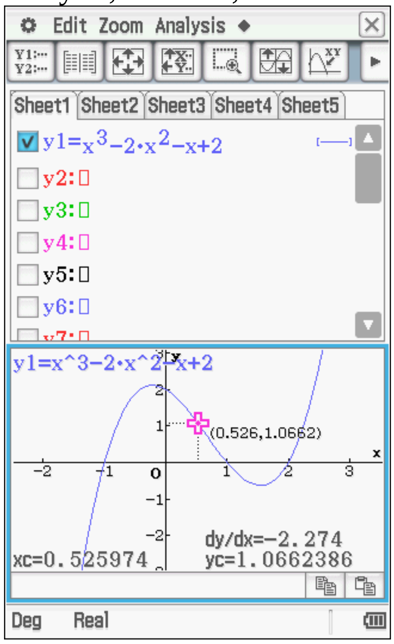
Gå inn i Graph Format
Sett Derivative/Slope On.



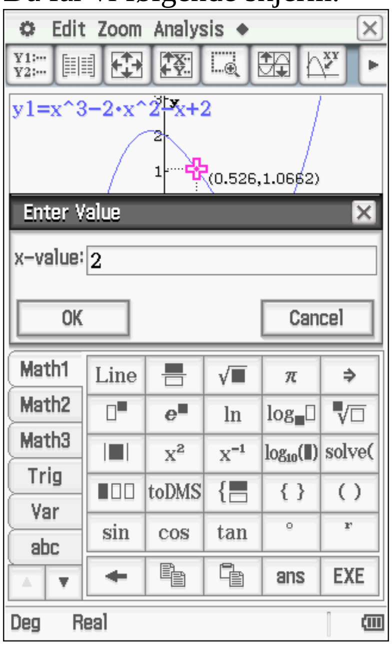
Tegn grafen.



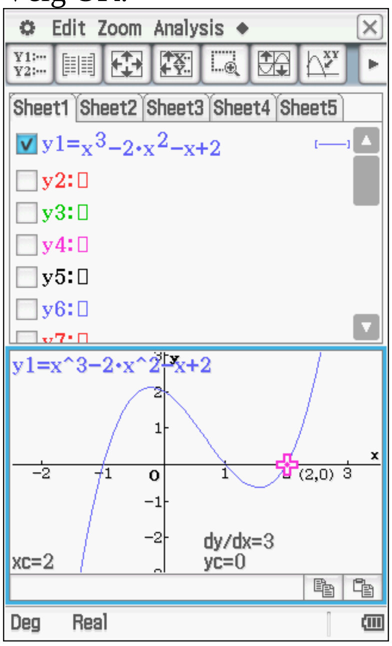
Analysis, G-Solve, Trace.



Trykk direkte på tallet 2 på tastaturet.
Da får vi følgende skjerm.

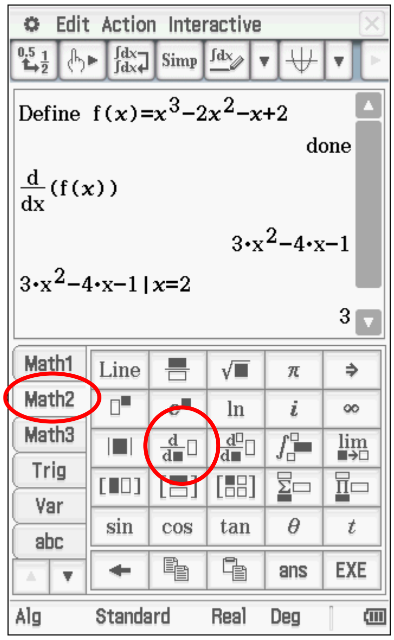


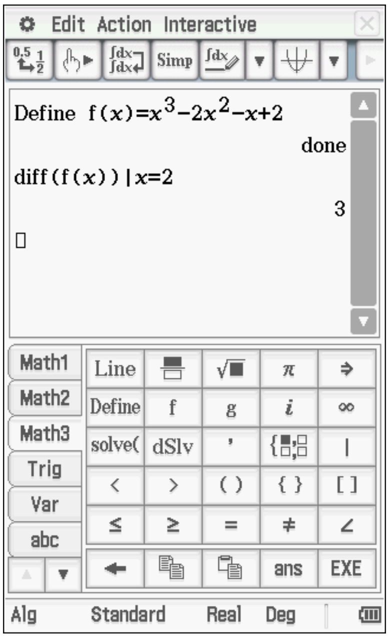
Velg OK.



Svar: $f'(2) = 3$.

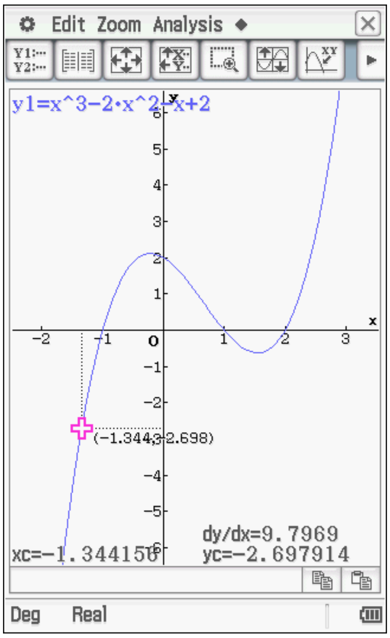
Kontroll:

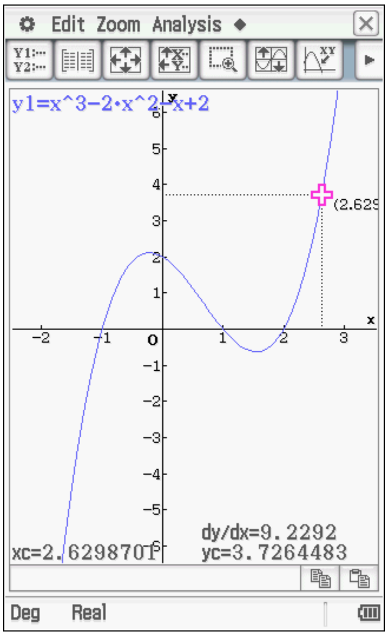




Vi får bekreftet at $f'(2) = 3$.

Vi kan også trace ut verdier for den deriverte til funksjonen.

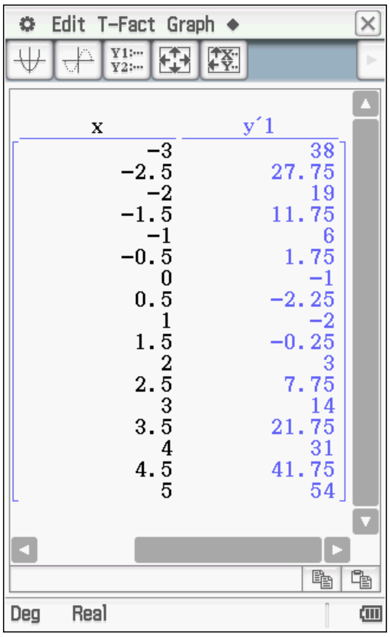




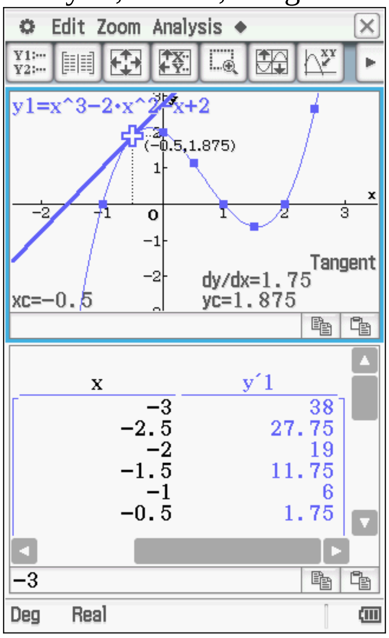
Flytt markøren ved hjelp av piltastene.

Når Derivative er satt til On, kan vi skrive ut en tabell som viser sammenhørende verdier for x og y samt verdiene for den deriverte.

På nest skjermbilde ser vi for eksempel at $f'(2) = 3$ og $f'(3) = 14$



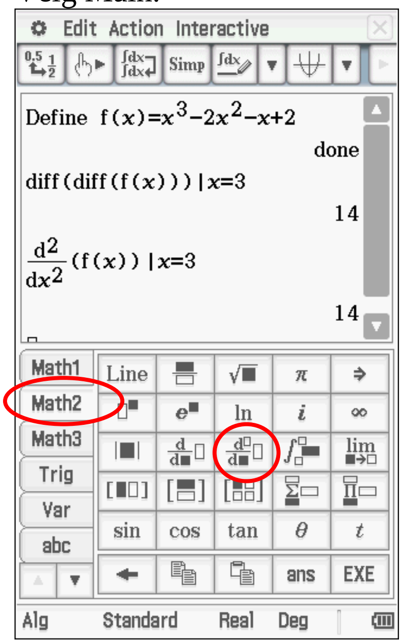
Analysis, Sketch, Tangent.



Hva er sammenhengen mellom stigningstallet til tangenten i et punkt og verdien til den deriverte i punktet?

 Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Bestem $f''(3)$.

Velg Main.



Svar: $f''(3) = 14$

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Bestem x-verdien til eventuelle vendepunkt på grafen til f.

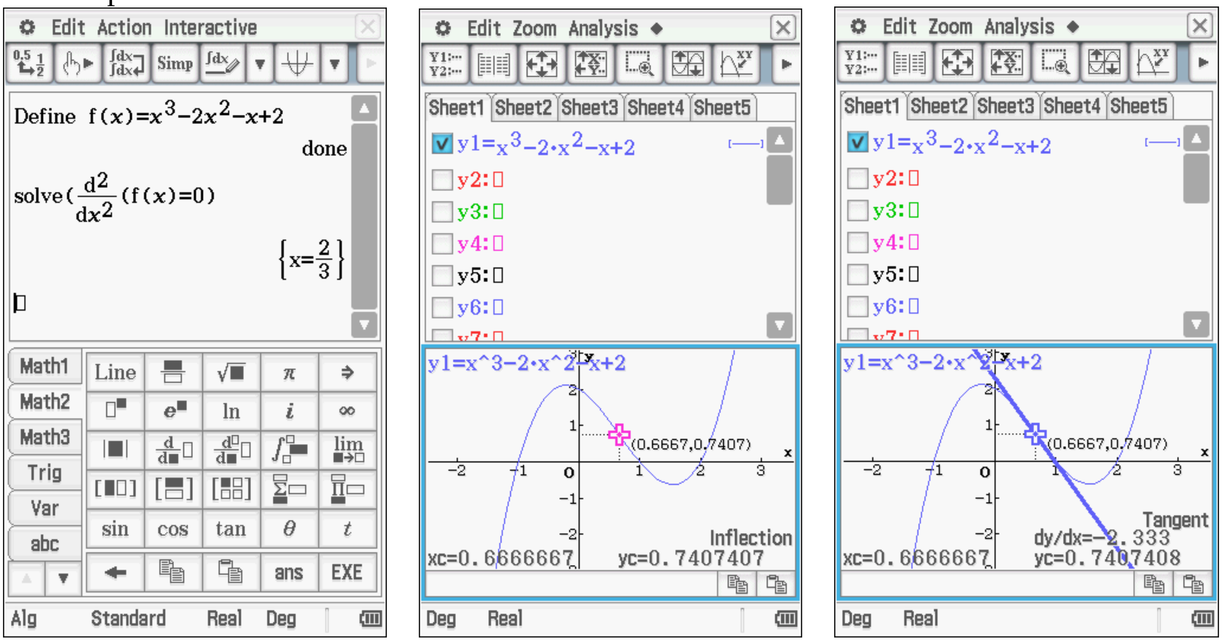
Vi får at

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ og $f''(x) = 6x - 4$

Altså:

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}$$

Direkte på CP400



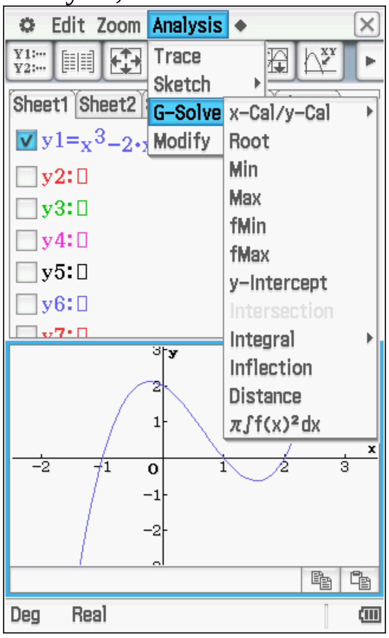
Svar: Grafen til f har vendepunkt for $x = \dfrac{2}{3}$.

Vendepunktet ligger mellom topp- og bunnpunkt på grafen. I vendepunkt skifter grafen krumning. Tangenten i et vendepunkt er en såkalt vendetangent.

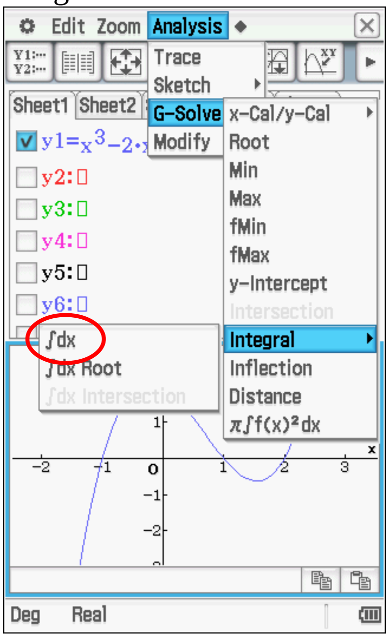
4.7 Integral – areal

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
Bestem arealet av området som ligger i første kvadrant og som er avgrenset av grafen til *f* og de to aksene.

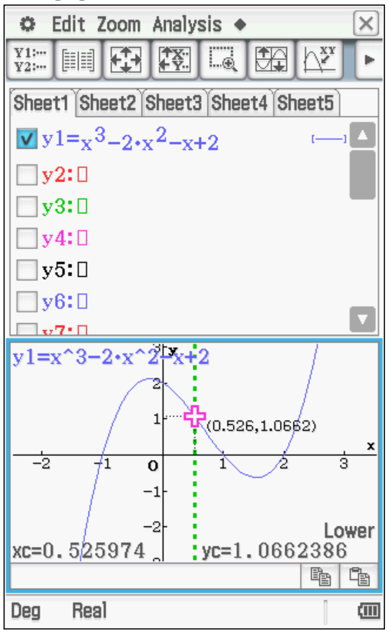
Analysis, G-Solve.



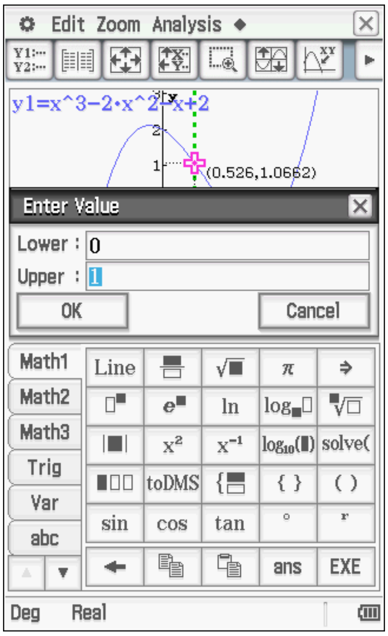
Integral.

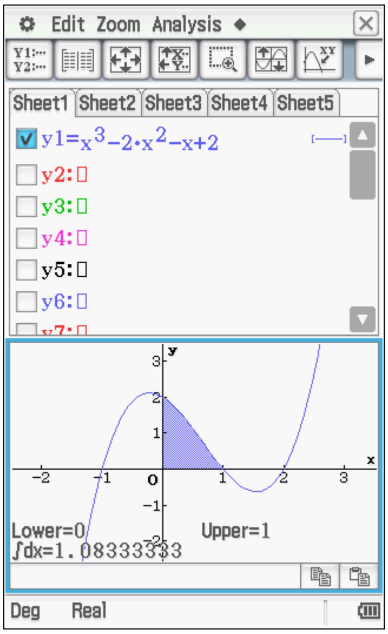


Velg grenseverdier.



Velg nedre grenseverdi for integralet ved å trykke direkte på tallet 0.



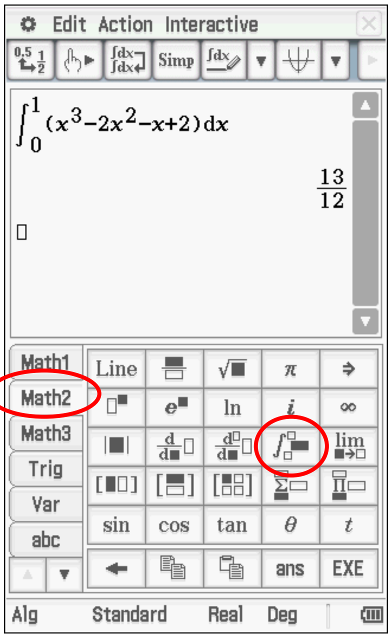


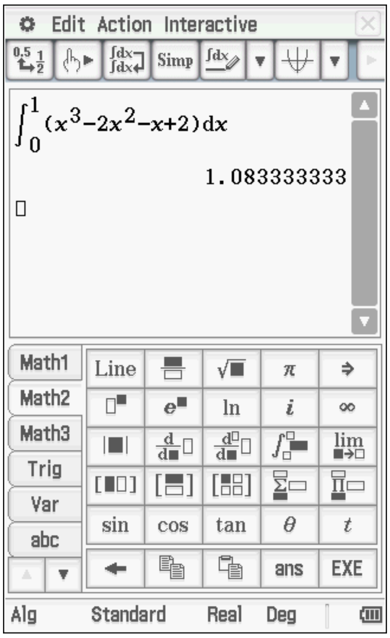
Vi ser at arealet som ligger i første kvadrant og som er avgrenset av grafen til *f* og de to aksene, er lik 1,0833.

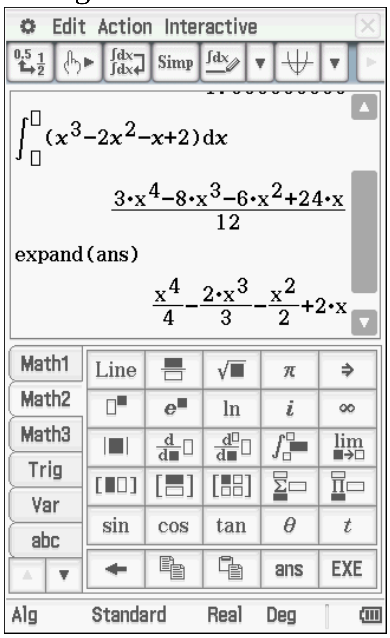
Kontroll:
Gå til Main i hovedmenyen.

Skriv inn funksjonsuttrykket og grenseverdiene. Trykk EXE. Svaret er altså $\dfrac{13}{12}$.

Svaret som desimaltall. Uten grenseverdier.



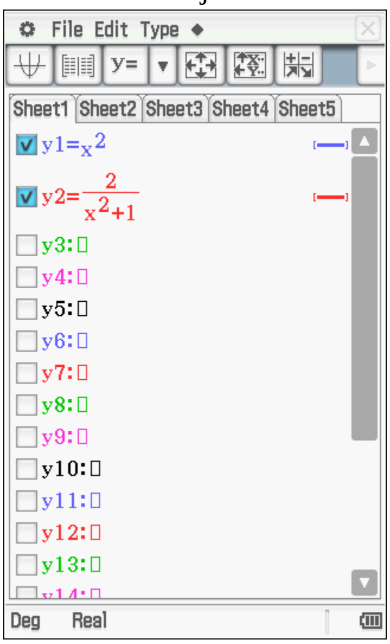


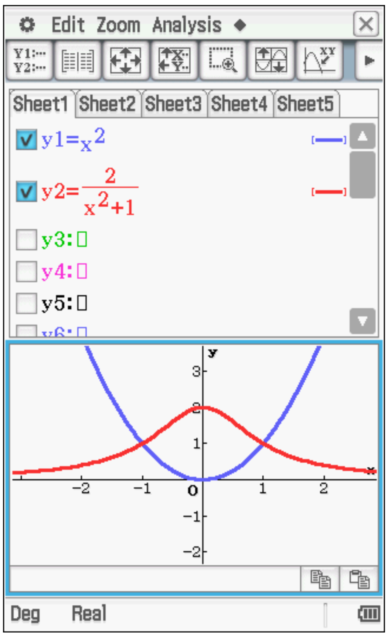


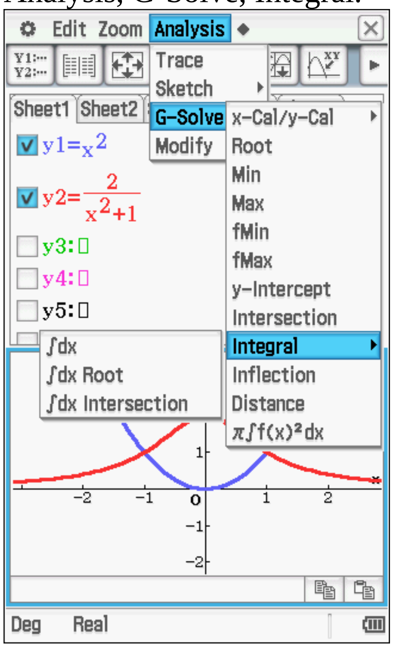
Vi får bekreftet svaret fra den grafiske løsningen. Uten grenseverdier løser vi det ubestemte integralet. Husk å legge til en konstant.

Bestem arealet avgrenset av grafene til $f(x) = x^2$ og $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

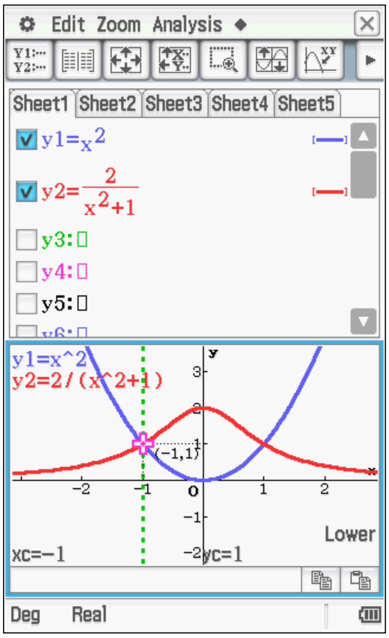
Skriv inn funksjonene. Analysis, G-Solve, Integral.



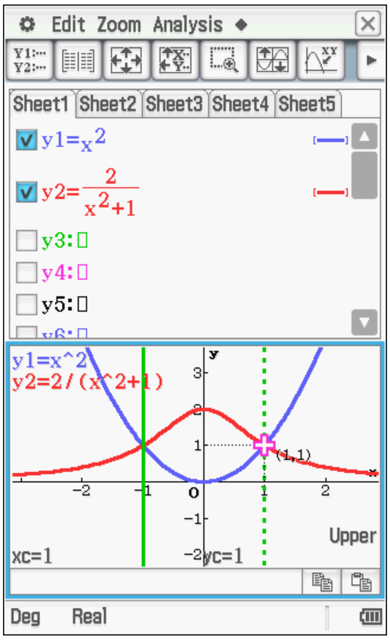




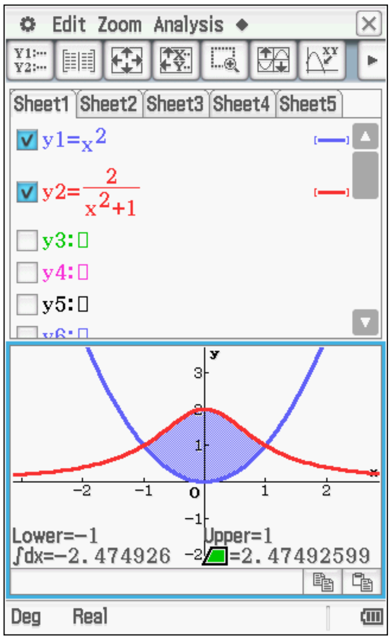
$\int dx$ Intersection. EXE.



Pil høyre. EXE.



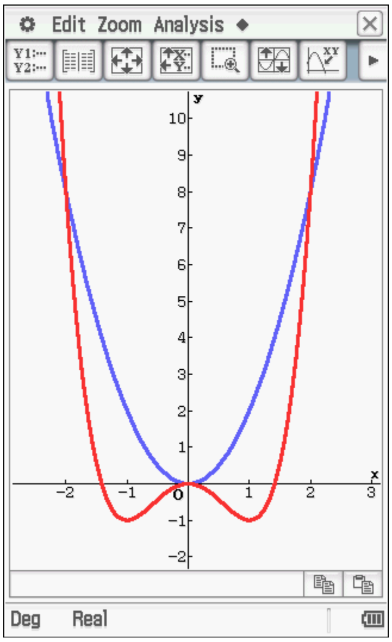
EXE.



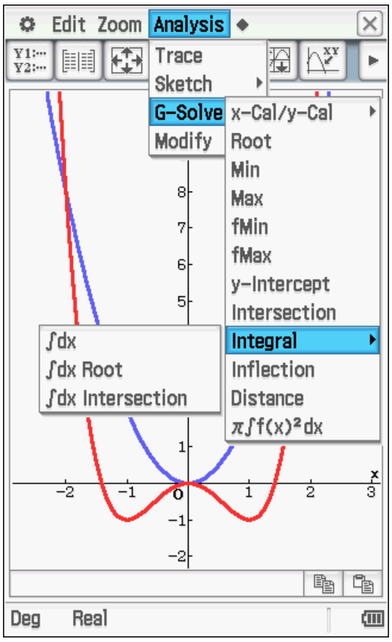
Arealet avgrenset av grafene er tilnærmet 2,47 arealenheter.

 Bestem arealet av området begrenset av grafene til $f(x)=2x^2$ og $g(x)=x^4-2x^2$.

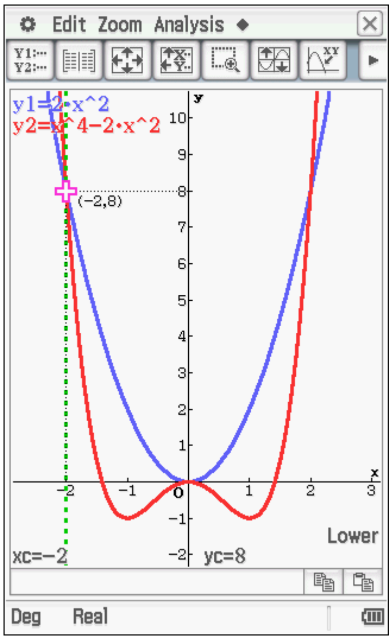
Tegn grafene.



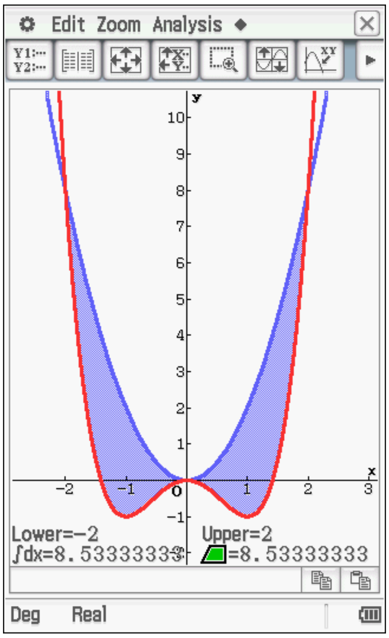
Gå til $\int dx$ Intersection. EXE.

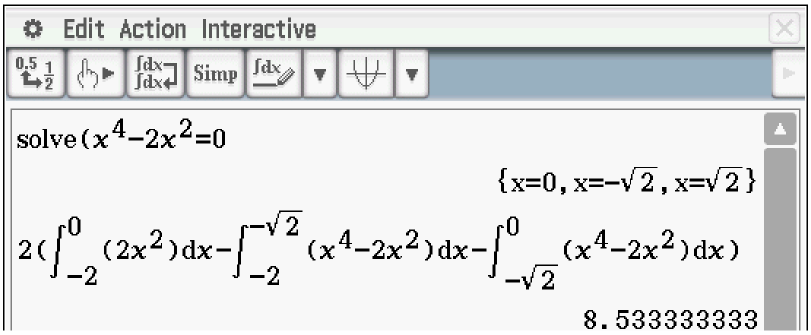


EXE og pil høyre to ganger.



Bekreft med EXE.





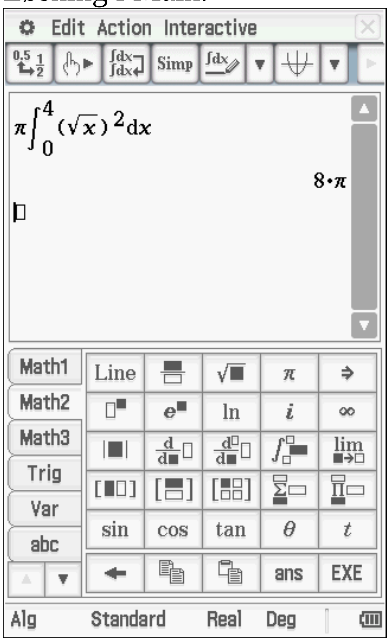
Arealet avgrenset av grafene er tilnærmet 8,53 arealenheter. Bildet til høyre viser algebraisk løsning.

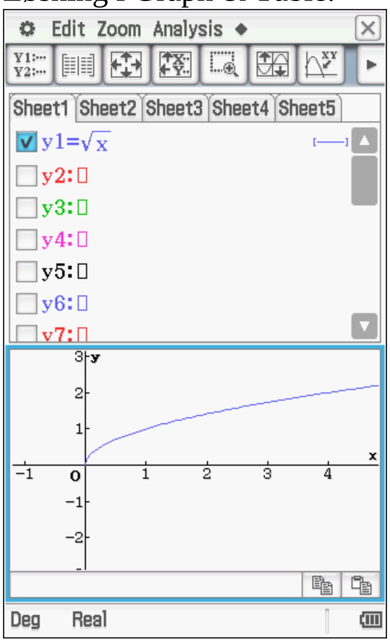
4.8 Integral - volum til omdreiningslegeme

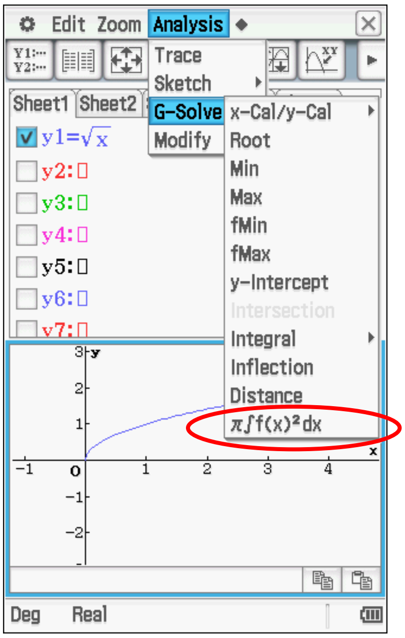
Et område er avgrenset av grafen til $y=\sqrt{x}$ der $0 \le x \le 4$ og x-aksen. Vi roterer dette området rundt x-aksen. Da får vi et omdreiningslegeme. Regn ut volumet til omdreiningslegemet.

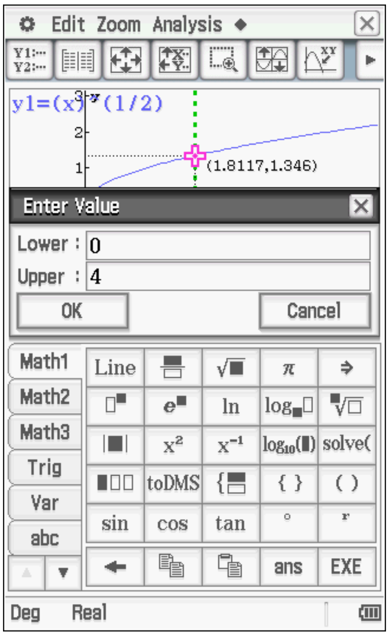
Volumet til omdreiningslegemet er gitt ved: $\text{Volume} = \int_a^b \pi(radius)^2\,dx = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$

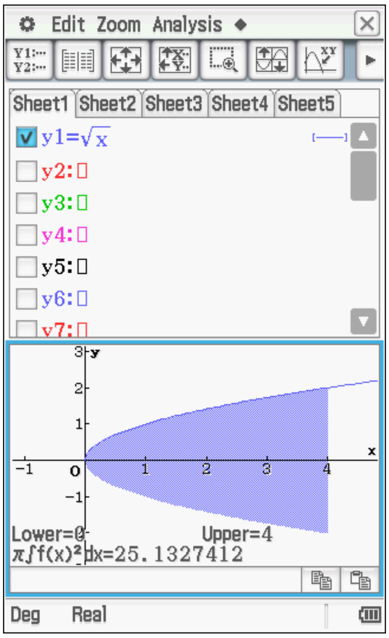
Løsning i Main. Løsning i Graph & Table.











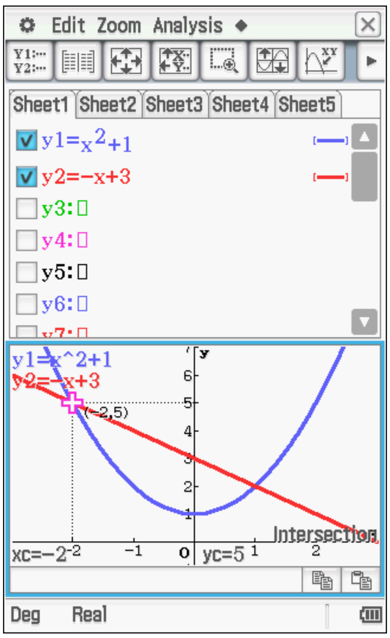
Volumet til omdreiningslegemet er altså $8\pi \approx 25{,}13$ volumenheter.

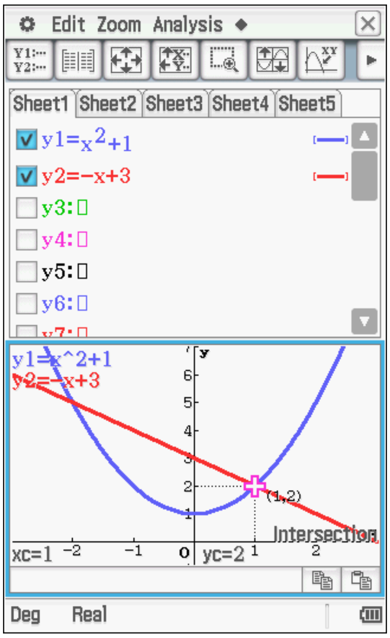
Et område er avgrenset av grafen til $y = x^2 + 1$ og den rette linjen $y = -x + 3$. Vi roterer dette området rundt x-aksen og vi får et omdreiningslegeme.

Bestem volumet til omdreiningslegemet.

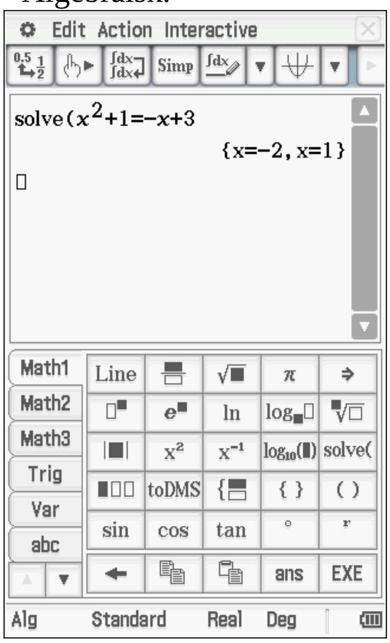
Grensene til det bestemte integralet er i dette tilfellet x-koordinatene til skjæringspunktene mellom parabelen og den rette linjen.

Grafisk.

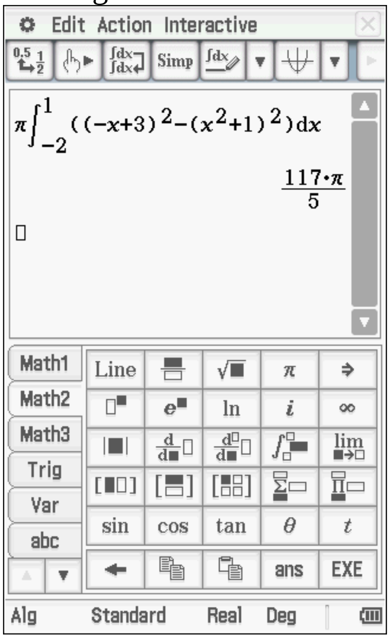


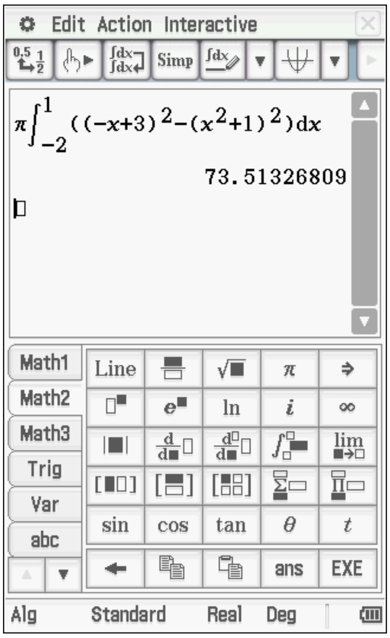


Algebraisk.



Merk at integranden er differansen mellom $y^2 = (-x+3)^2$ og $y^2 = (x^2+1)^2$.
Løsning.





Volumet til omdreiningslegemet er $\dfrac{117\pi}{5} \approx 73{,}51$ volumenheter.

4.9 Integral - overflate til omdreiningslegeme

Hvis funksjonen *f* er deriverbar i hele intervallet $a \le x \le b$, er overflatearealet til omdreiningslegemet vi får når kurven $y = f(x)$ roterer rundt *x*-aksen, gitt ved

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Området avgrenset av halvsirkelen $y = \sqrt{1^2 - x^2}$ og *x*-aksen roterer rundt *x*-aksen.

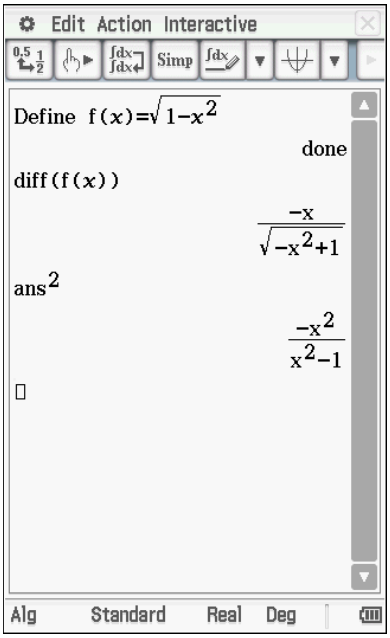
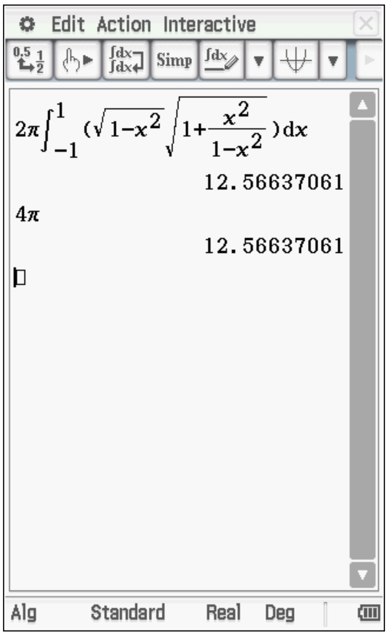
Omdreiningslegemet som da framkommer, er en kule med radius 1.

Bestem overflatearealet til denne kula.

Først finner vi at $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ som gir $(y')^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Se neste skjermbilde.

Legger inn integranden og grenseverdiene i det bestemte integralet.

Overflatearealet til en kule med radius 1 er altså $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi$

4.10 Integral – buelengde

Hvis funksjonen $y = f\left(x\right)$ har en kontinuerlig derivert i hele intervallet $a \le x \le b$, så er buelengden L til kurven $y = f(x)$ fra a til b gitt ved $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$.

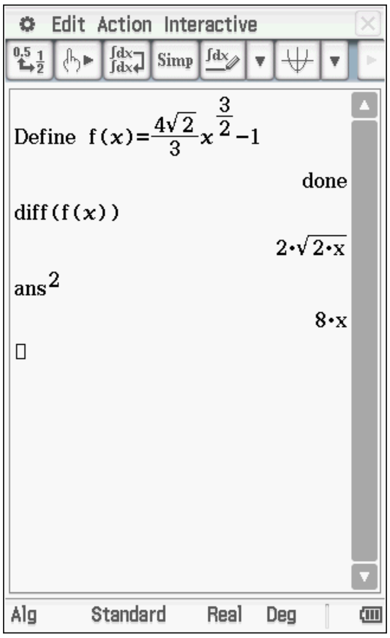
Bestem buelengden til kurven $y = f\left(x\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1$ der $0 \le x \le 1$.

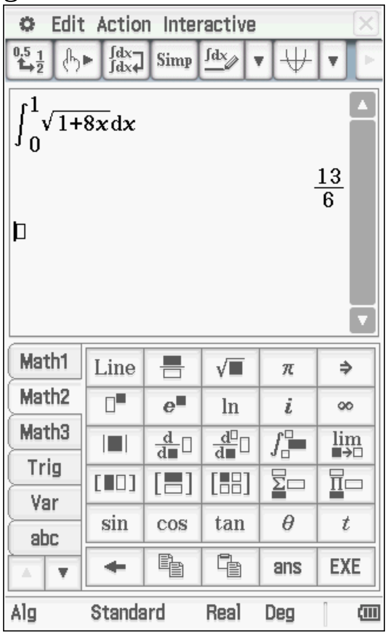
Først finner vi at $y' = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2x}$ som gir $(y')^2 = 8x$

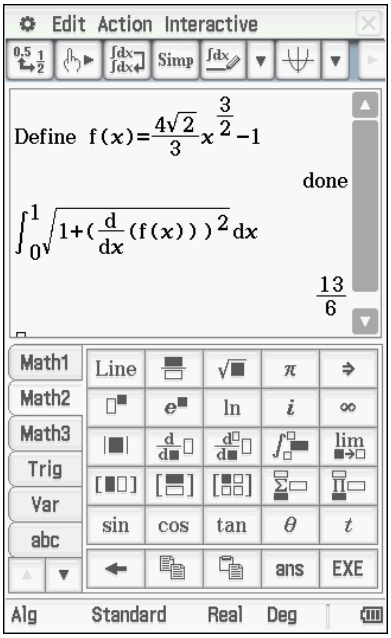
Se neste skjermbilde.

Legger inn integranden og

grenseverdiene. Eller direkte.







Buelengden $L \approx 2{,}167$ eller $\dfrac{13}{6}$.

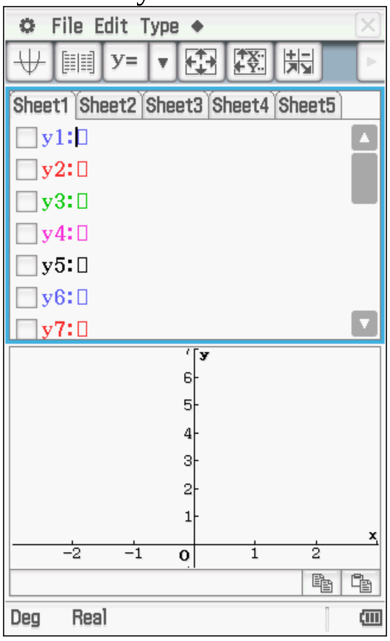
4.11 Parameterframstilling

Mange svært interessante grafer er ikke funksjonsgrafer av typen $y = f(x)$, men kan beskrives ved at både x and y selv er funksjoner av en såkalt parameter. Sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ kan for eksempel beskrives parametrisk ved $x = \cos t$ and $y = \sin t$. Her er altså t den såkalte parameteren. Kurven som et bevegelig punkt følger, kan på denne måten beskrives av en parameter, der parameteren t er tiden.

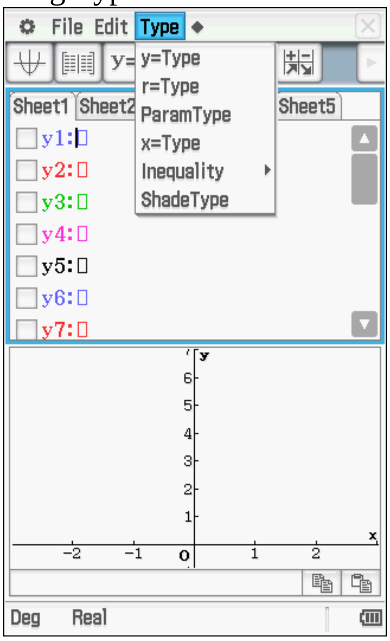
Et bevegelig punkt festet til et roterende hjul er et interessant eksempel der parameterframstilling kan anvendes. Den såkalte sykloiden kan beskrives av et punkt som er festet på eiken til et hjul som triller bortover på et horisontalt underlag.

Vi tenker oss at en sirkel med radius 2 ruller på x-aksen uten å gli.
Et fast punkt P på sirkelen beskriver da en kurve som vi kaller en *sykloide.*
Parameterframstillingen til sykloiden er $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, der a er radius.
Tegn kurven på lommeregneren.

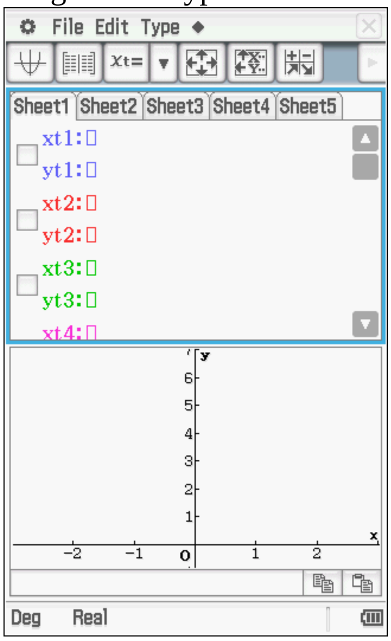
Velg Graph & Table i hovedmenyen.



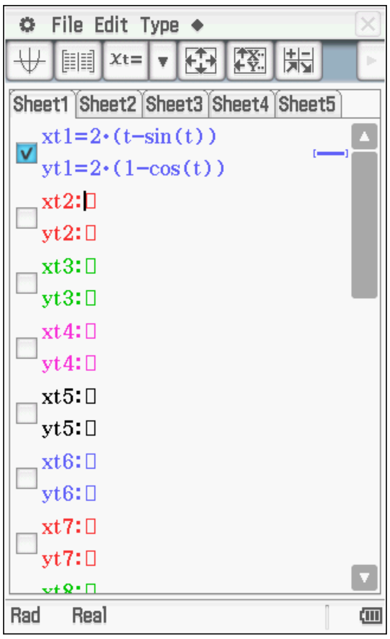
Velg Type.



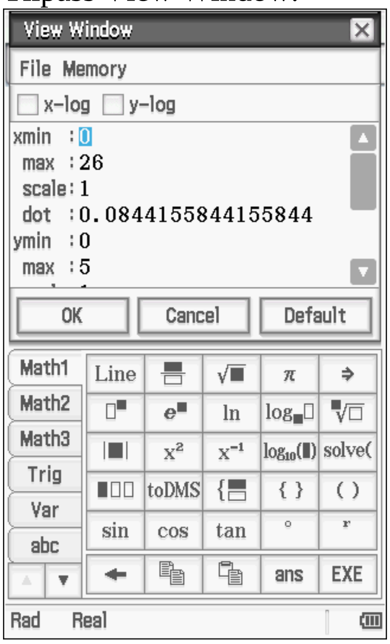
Velg Param Type

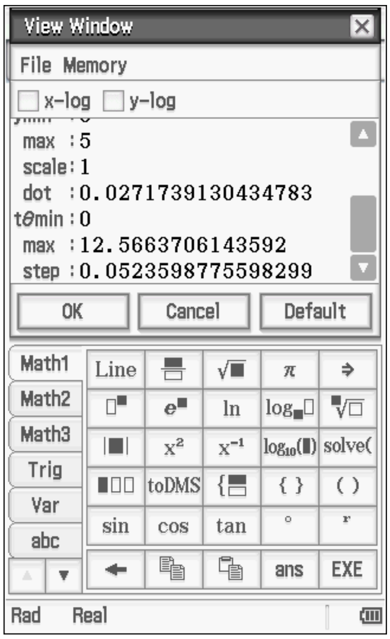


Skriv inn funksjonsuttrykkene.
Sett $a = 2$.

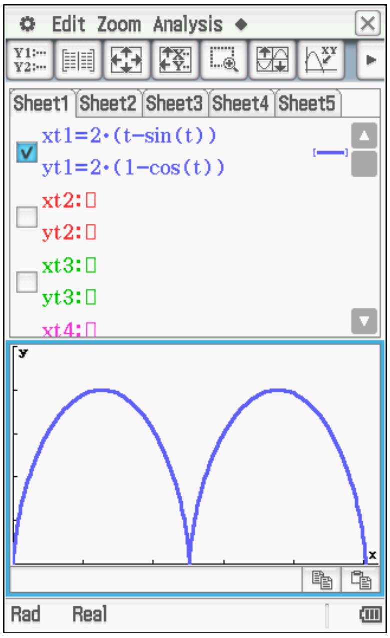


Tilpass View Window.

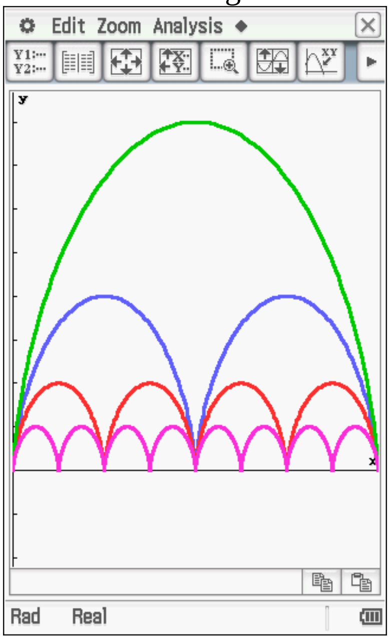




Grafen er en sykloide.

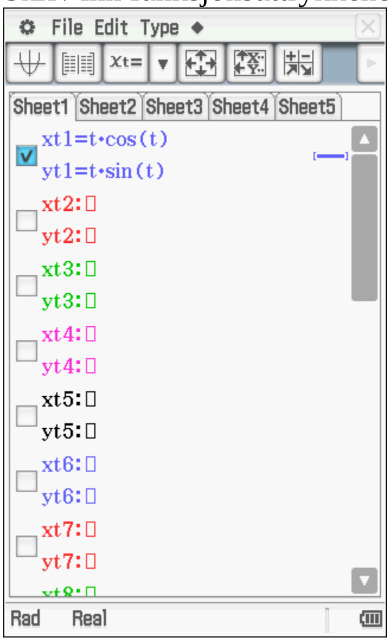


Sett farge på tilværelsen med fx-CP400. Prøv for eksempel denne eller noe lignende.

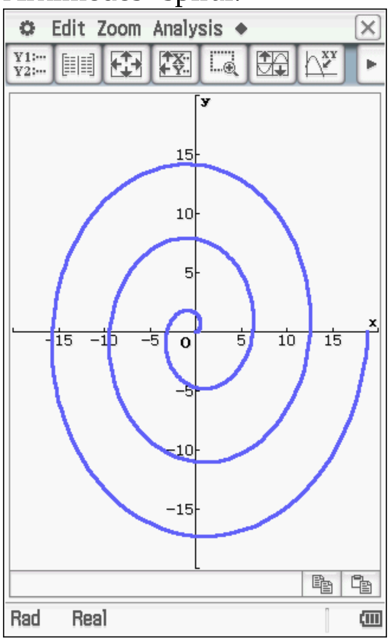


Kurven med parameterframstillingen $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, er en type kurve som vi kaller Arkimedes´ spiral. Tegn for $t \in [0, 6\pi]$.

Skriv inn funksjonsuttrykkene.



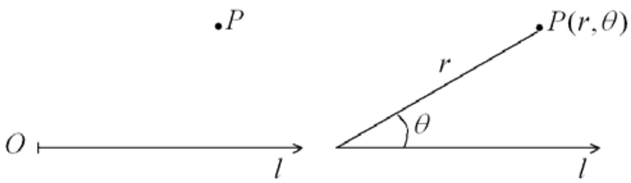
Arkimedes´ spiral.



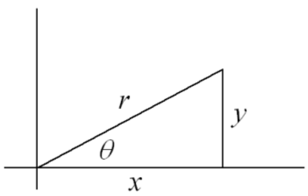
Øv deg på å justere View Window.

4.12 Polarkoordinater

Anta at *l* er en rettlinjet akse som starter i origo *O*, og at *P* er et punkt i planet. Vi kan lokalisere *P* i forhold til *l* og *O* ved å spesifisere både avstanden *r* fra *O* til *P* og vinkelen θ som linjestykket *OP* danner med *l*.



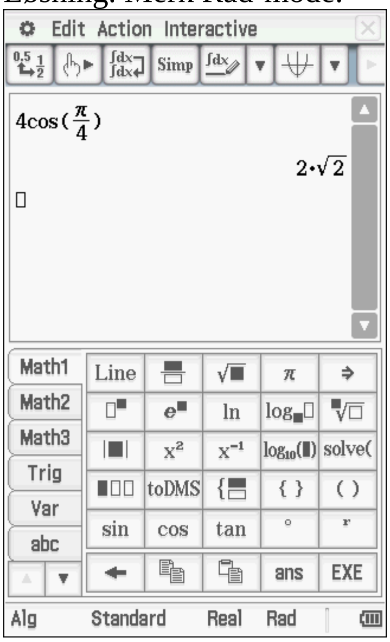
Det ordnede tallparet (r,θ) kaller vi polarkoordinatene til punktet *P*. Polarkoordinatene til punktet *P* er ikke spesifikke. Siden vinkelen gjentar seg for hver 2π , er det opplagt at $(r,\theta)=(r,\theta+2\pi)$ En negativ verdi for *r* tilsvarer en dreining på 180°. Det betyr at $(-r,\theta)=(r,\theta+\pi)$. Hvis vi lar aksen *l* være den positive *x*-aksen, kan punktet *P* i planet ha både kartesiske koordinater (x, y) og polarkoordinater (r,θ) . Se figuren nedenfor.



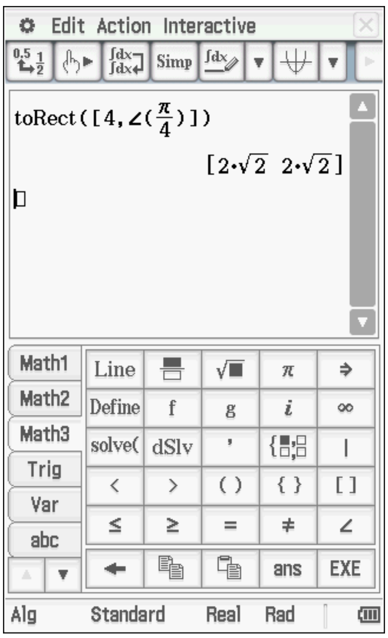
Ved å anvende definisjonen av sinus og cosinus får vi følgende sammenheng mellom de kartesiske koordinatene (x, y) og polarkoordinatene (r,θ): $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Vi kan også uttrykke *r* og θ ved *x* og *y*. Vi får at $r^2=x^2+y^2$ og $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$. Altså $r=\sqrt{x^2+y^2}$ og $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

 Gjør om koordinatene $(4,\dfrac{\pi}{4})$ fra polarkoordinater til kartesiske koordinater.

Løsning. Merk Rad-mode.



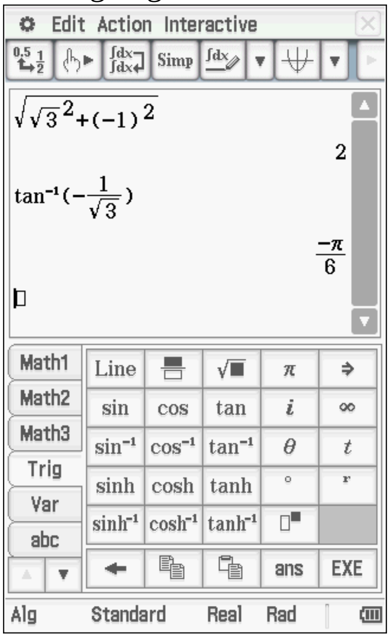
Ved bruk av kommandoen toRect.



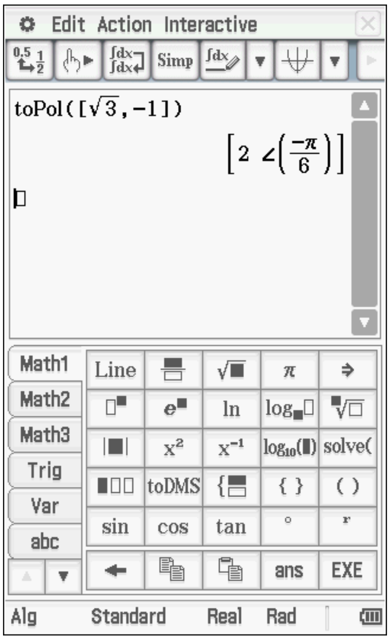
Svar: $x = 2\sqrt{2}$ og $y = 2\sqrt{2}$. Merk at $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Gjør om koordinatene for punktet $(\sqrt{3}, -1)$ fra kartesiske koordinater til polarkoordinater.

Ved regning.



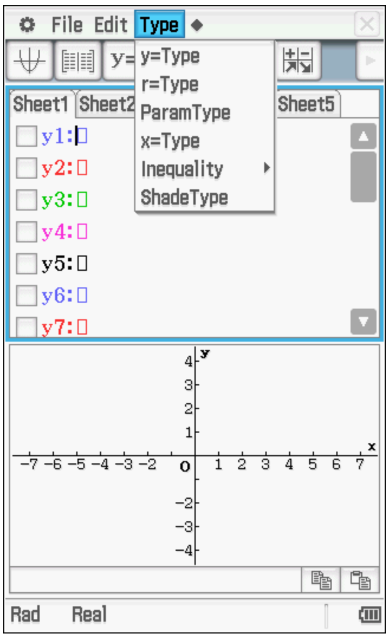
Ved bruk av kommandoen toPol.



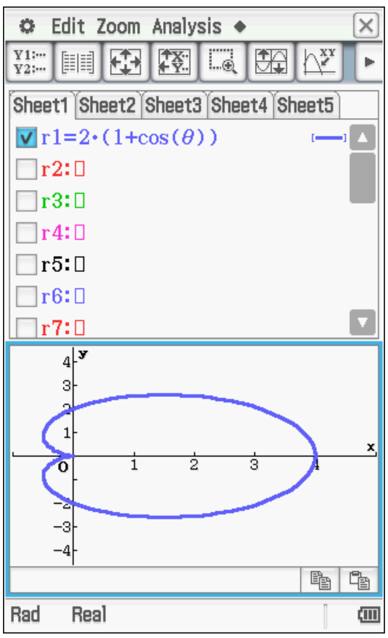
Svar: $r = 2$ og $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

Kurven $r = 2(1+\cos\theta)$ har form som et hjerte og blir derfor kalt kardioiden.
Tegn kurven.

Velg polarkoordinater.
Trykk $\mathrm{r} = \mathrm{Type}$.



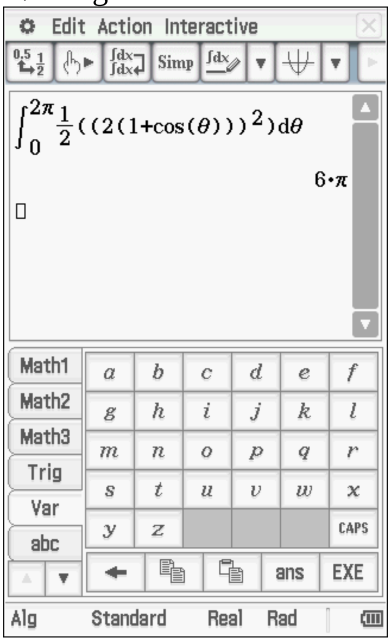
Kardioiden.



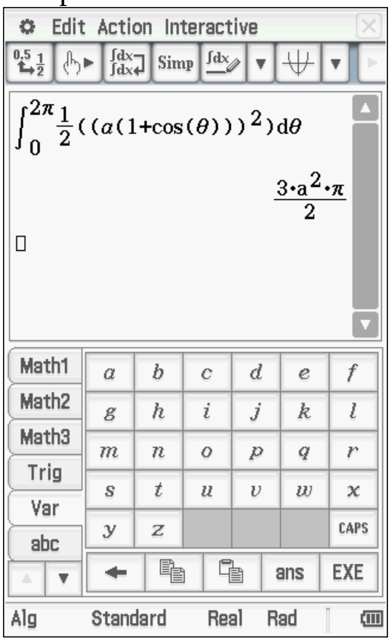
 Regn ut arealet til området avgrenset av kardioiden gitt ved $r = 2(1+\cos\theta)$.

Arealet A av området avgrenset av kurven $r = f(\theta)$ og $r = r(\theta)$ der $\theta \in [\alpha, \beta]$ er gitt ved $A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta$.

Løsning.



En spennende formel.



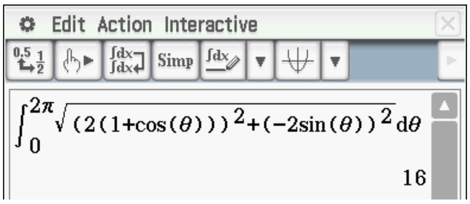
 Regn ut buelengden til kardioiden gitt i polarkoordinater ved $r = 2(1+\cos\theta)$.

Dersom $r = f(\theta)$ har en kontinuerlig derivert for $\theta \in [\alpha, \beta]$ og hvis punktet $P(r, \theta)$ ligger på kurven $r = f(\theta)$ kun en gang når θ går fra α to β, er lengden av kurven gitt ved formelen

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \,\mathrm{d}\theta$$

Vi får at $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2\sin\theta$.

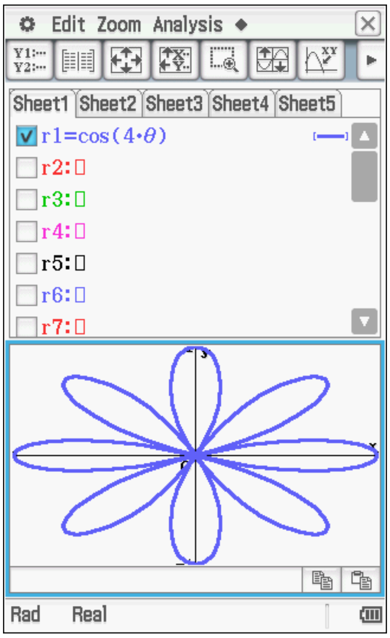
Løsning. Buelengden er 16.

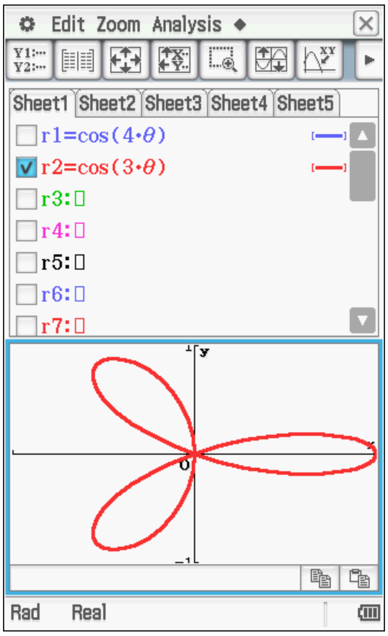


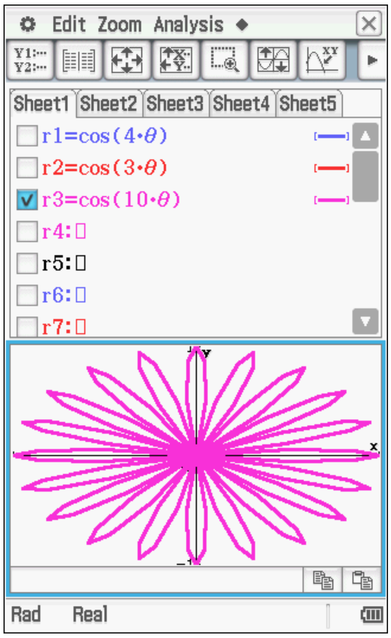
Generelt er likningen for en kardioide gitt ved $r = 2a(1+\cos\theta)$.

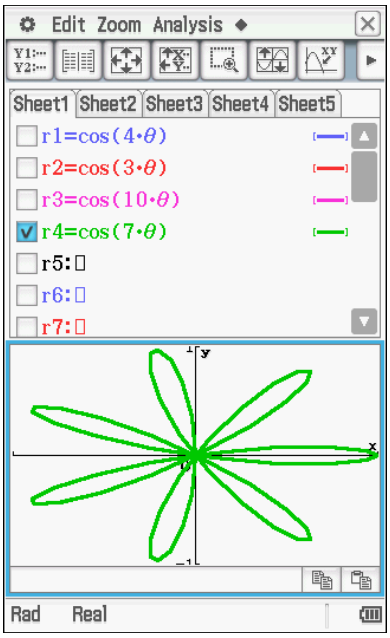
Utfordring.
Bruk lommeregneren til å verifisere at buelengden til en kardioide generelt er gitt ved $16a$ og at arealet avgrenset av en kardioide er $6\pi a^2$.

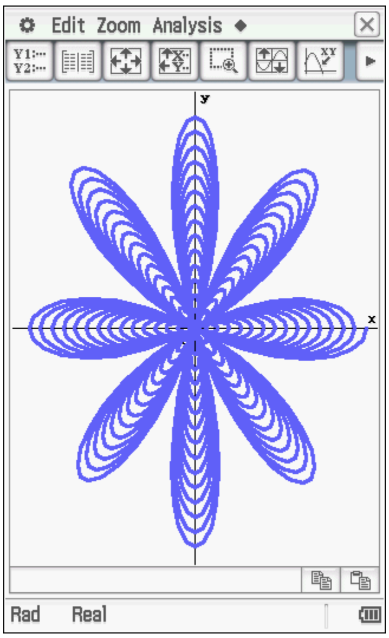

Eksperimenter med $r = a\cos n\theta$ og $r = a\sin n\theta$ og undersøk om det er noen sammenheng mellom antall blader og om hvorvidt n er partall eller oddetall. Se skjermbildene nedenfor.











Hvordan?

4.13 Regresjon. Funksjonstilpasning.

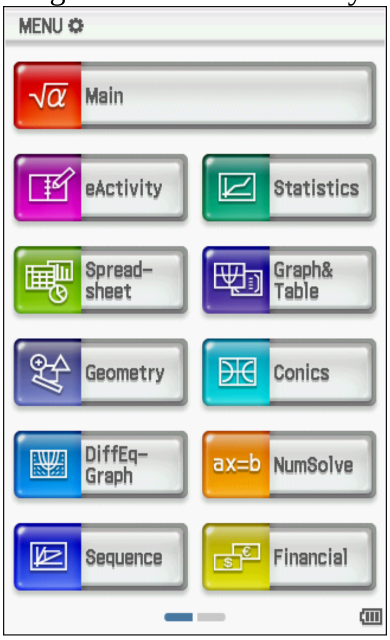
En viktig side ved bruk av funksjoner er å lage matematiske modeller som tilnærmet beskriver sammenhenger vi observerer. Observasjonene vi gjør, blir tatt vare på og lagt inn i tabeller. På grunnlag av tabellene forsøker vi så å lage modeller som best mulig beskriver sammenhengen mellom y-verdier og x-verdier. Denne prosessen kaller vi regresjon eller funksjonstilpasning.

Et butikksenter ble åpnet for et par år siden. Tabellen under viser omsetningen de først månedene etter åpning. Januar er måned 1, februar er måned 2 og så videre.

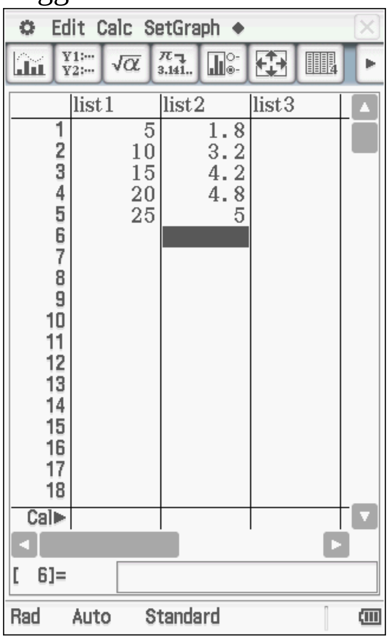
Måned	5	10	15	20	25
Omsetning (i millioner kroner per måned)	1,8	3,2	4,2	4,8	5,0

Finn en modell for omsetningen per måned i de 25 første månedene.

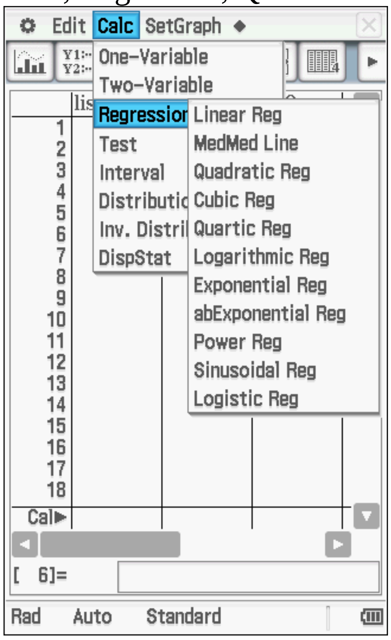
Velg Statistics i hovedmenyen.

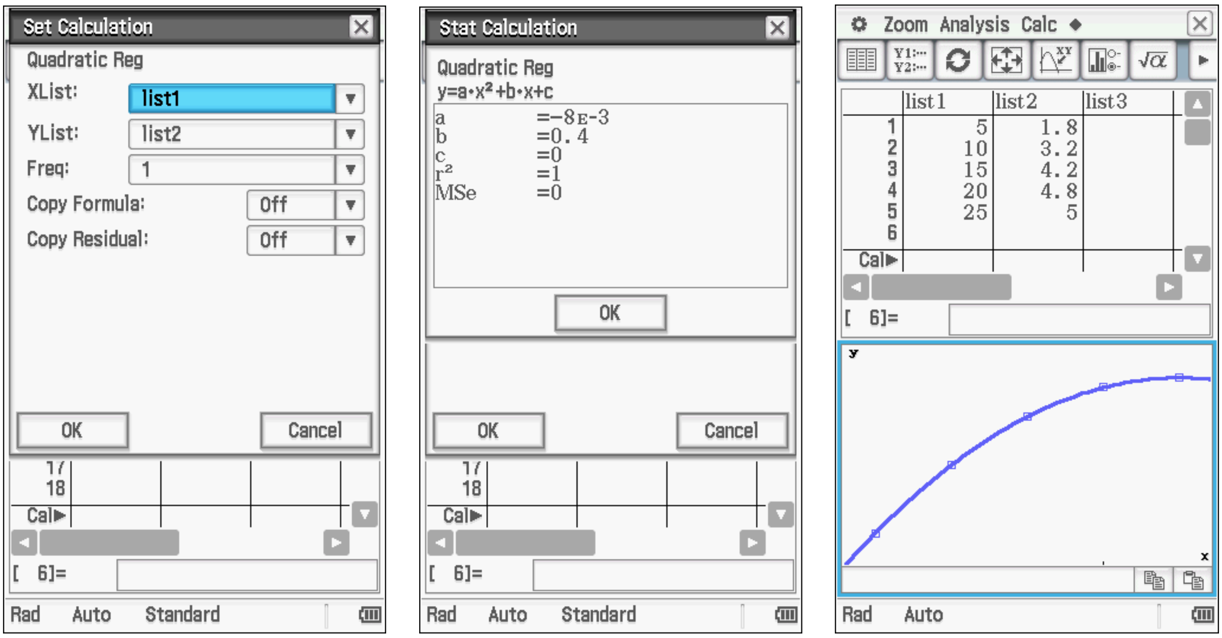


Legg inn tabellverdiene.



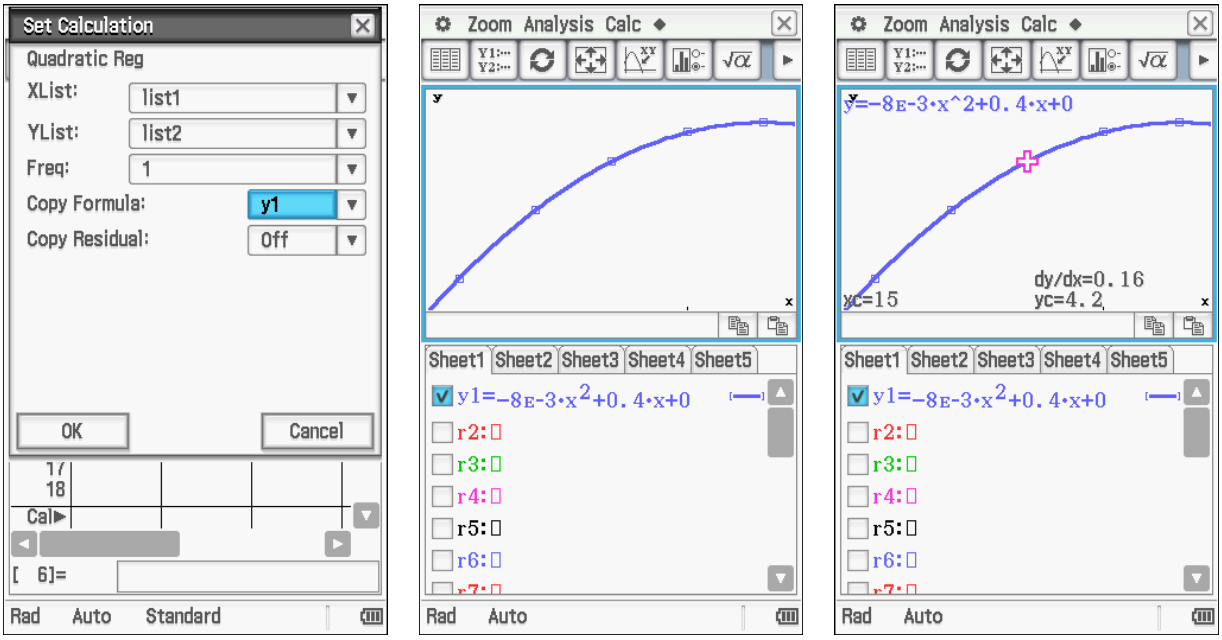
Calc, Regression, Quadratic Reg.





Quadratic Reg gir en andregradsfunksjon. Vi ser at $r^2 = 1$. Det betyr at funksjonen passer helt perfekt. Ved hjelp av regresjon på lommeregneren har vi funnet at funksjonen *f* gitt ved $f(x) = -0.008x^2 + 0,4x$, kan brukes som en matematisk modell for omsetningen per måned i de 25 første månedene.

Vi kan kopiere funksjonsuttrykket til for eksempel y1 i Graph & Table. Så kan vi bruke Analysis.



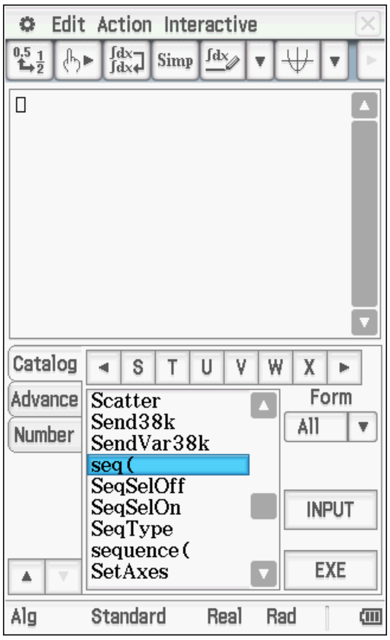
Gjennom en årrekke har skogforvaltere målt høyden til ulike trær i forskjellige omgivelser. For en bestemt tresort ble høyden til et tre bokført i en 30-årsperiode.

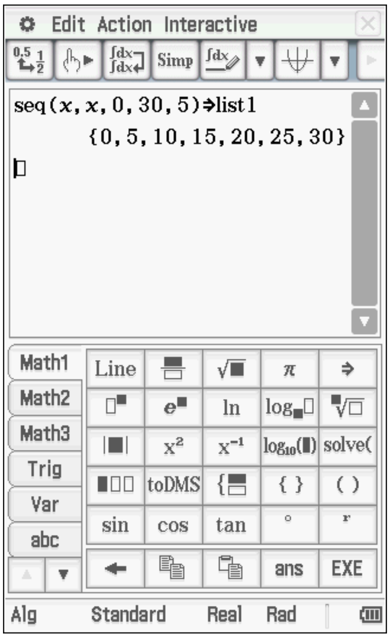
x – alder [år]	0	5	10	15	20	25	30
f(x) – høyde [m]	0	0,45	1,75	3,70	6,10	8,80	11,60

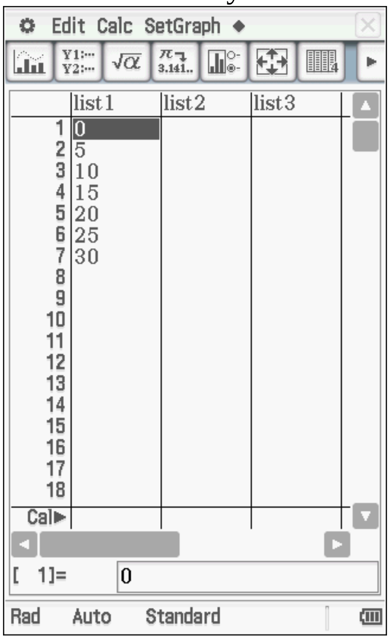
Finn en matematisk modell som best beskriver høyden til treet i denne 30-årsperioden.

Denne gangen velger vi å legge verdiene inn i List1 på en rasjonell måte.

Vi ser at list1 er fylt inn.

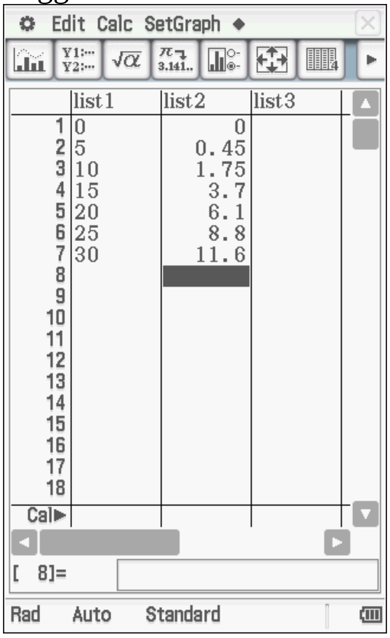




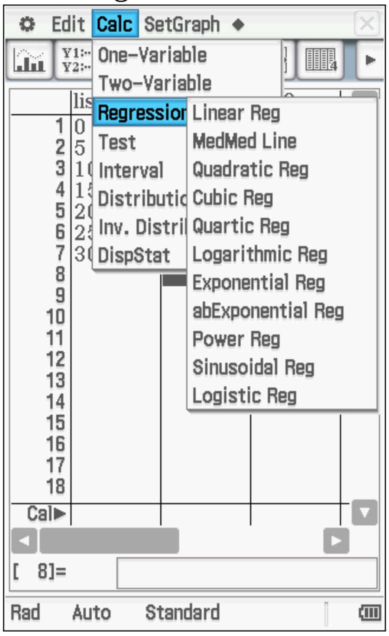


Vi kan spare mye tid på å legge verdier inn i lister på denne måten – særlig når det handler om mange verdier.

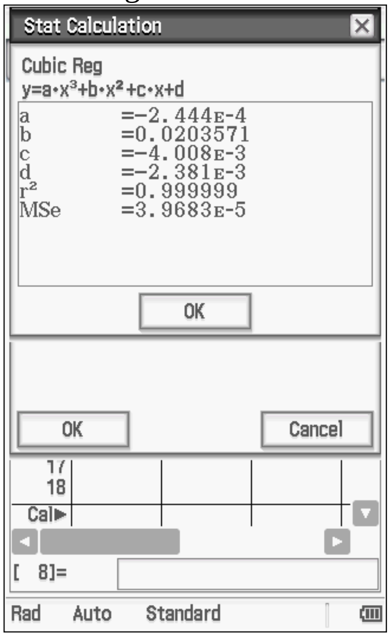
Legg inn tabellverdiene i list2.



Calc, Regression.

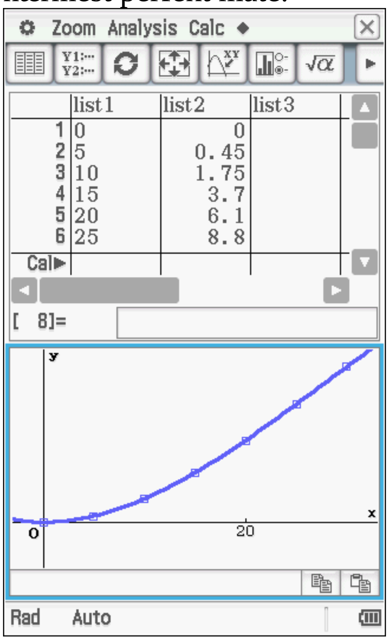


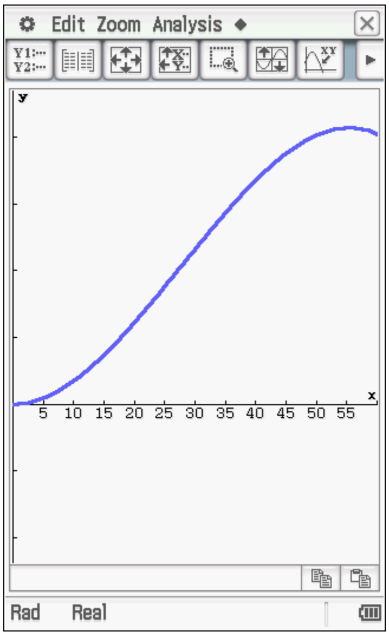
Cubic Reg.



Etter å ha prøvet og feilet med lineær og kvadratisk regresjon, finner vi ut at Cubic Reg passer som hånd i hanske.

Vi ser at $r^2 \approx 1$. Det betyr at tredjegradsfunksjonen beskriver utviklingen av trehøyden på en nærmest perfekt måte.





Ved hjelp av regresjon på lommeregneren har vi funnet at funksjonen f gitt ved $f(x) = -0{,}00024x^3 + 0{,}02x^2$, kan brukes som en matematisk modell for høyden til treet i denne 30-årsperioden. Vi kan tillate oss å kutte ut førstegradsleddet og konstantleddet. Sammenlignet med tredjegradsleddet og andregradsleddet er de to siste leddene neglisjerbare.

På skjermen ovenfor til høyre har vi strukket definisjonsmengden til 60 år. Ifølge modellen vil treet nå maksimum høyde etter omtrent 55 år. Det får oss til å tro at modellen neppe er gyldig lengre enn i 55 år. For en eventuell videre vekst må vi jakte på en ny modell.

Vi kan ikke bruke en modell som fører til at et tre begynner å krympe voldsomt i høyden etter at det har nådd maksimum høyde.

4.14 Grafisk løsning av ulikheter

Når vi løser enkle ulikheter, gjelder de samme regnereglene som for likninger, men med et **viktig** unntak:

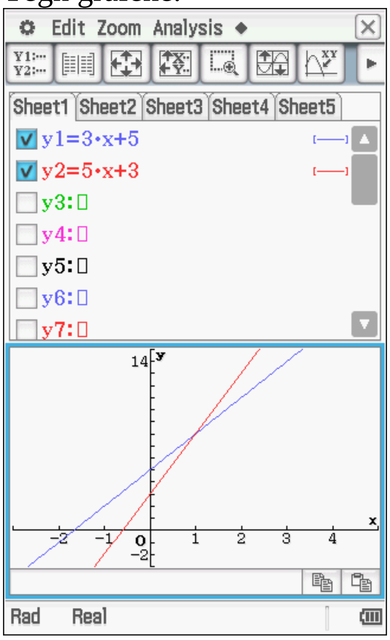
Dersom vi dividerer eller multipliserer med et negativt tall, må vi snu ulikhetstegnet.

Løs ulikheten: $3x+5>5x+3$ uten lommeregner.

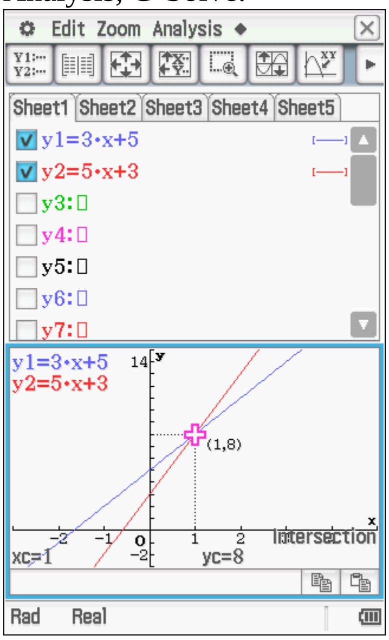
$3x+5>5x+3$
$3x-5x>3-5$
$-2x>-2$ Vi dividerer med -2 på begge sider og må snu ulikhetstegnet.
$x<1$

Løs ulikheten: $3x+5>5x+3$ med lommeregner.

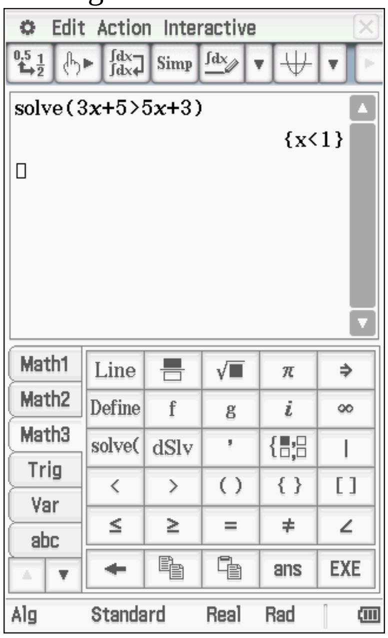
Tegn grafene.



Analysis, G-Solve.



Ulikhetstegn i Math3 eller i Catalog.



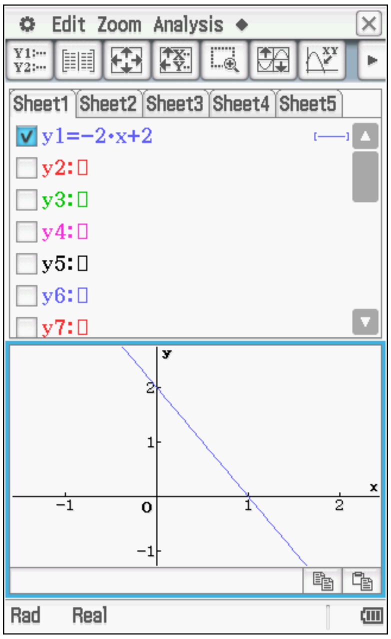
Merk at $y=5x+3$ er den bratteste linjen. Hvorfor?

Siden $\text{y1}>\text{y2}$ er ulikheten oppfylt for x-verdier der y1 ligger høyere enn y2.

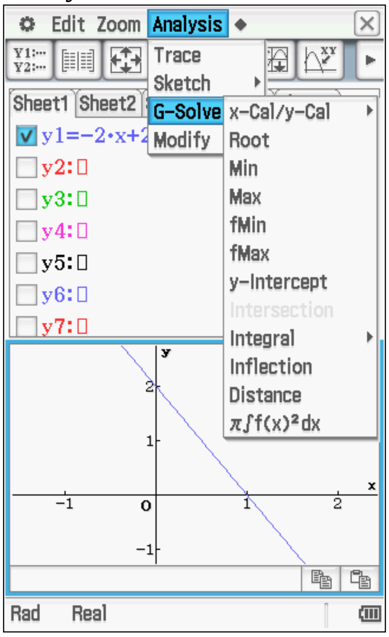
Løsning: $x < 1$

Eller slik:

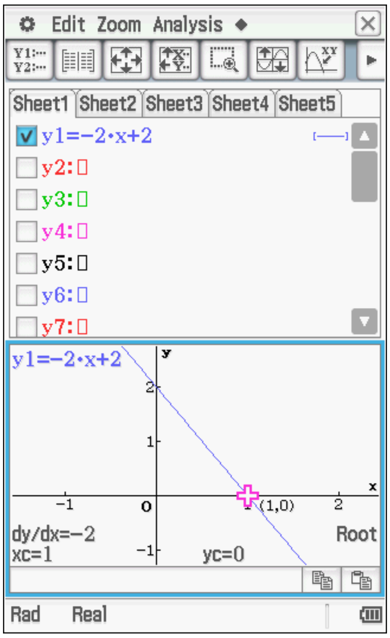
$$3x + 5 > 5x + 3$$
$$3x + 5 - 5x - 3 > 0$$
$$-2x + 2 > 0$$



Analysis, G-Solve.



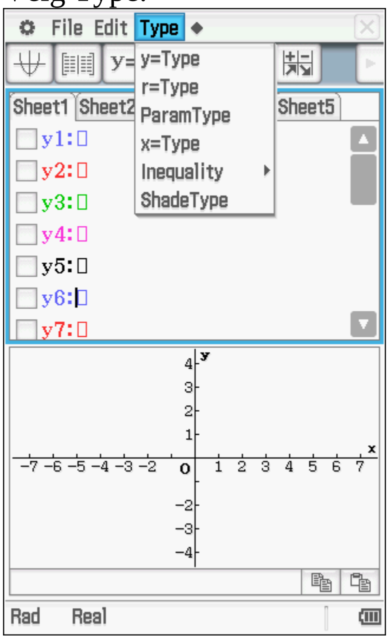
Root.



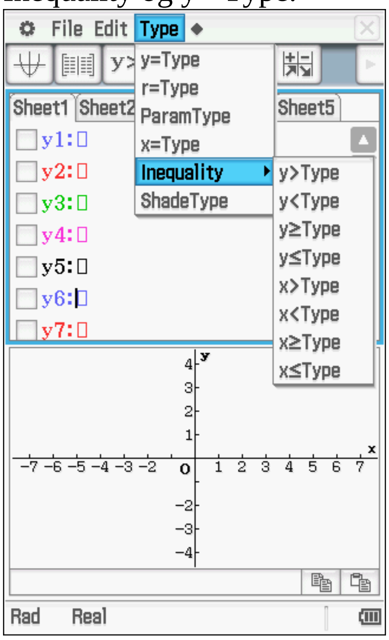
Siden $y1 > 0$ er ulikheten oppfylt for x-verdier der $y1$ ligger over x-aksen.

Løsning: $x < 1$

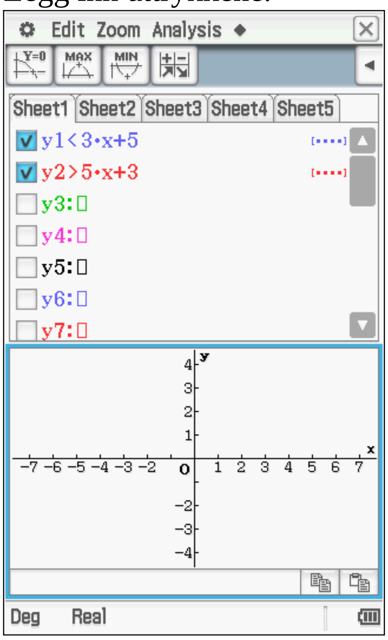
Velg Type.



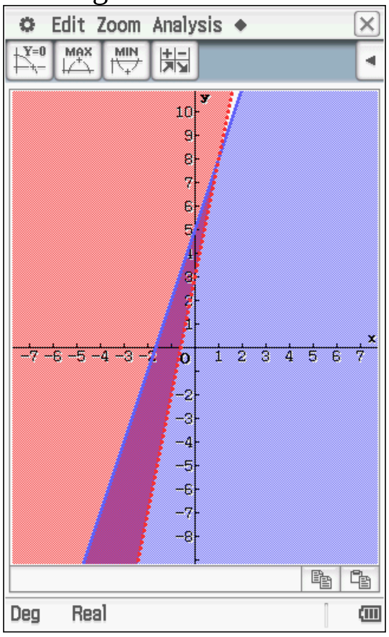
Inequality og y >Type.

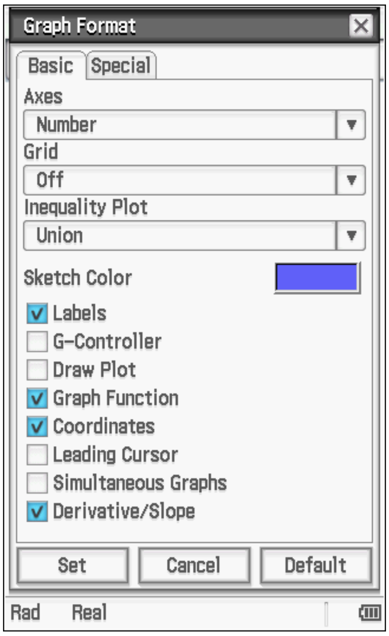


Legg inn uttrykkene.



Løsning.



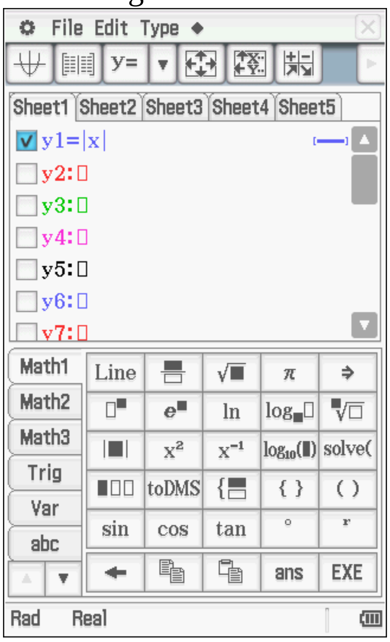


Merk at Inequality Plot Type er satt til Union i Graph Format. Området der ulikhetene er oppfylt, er dobbelskravert.

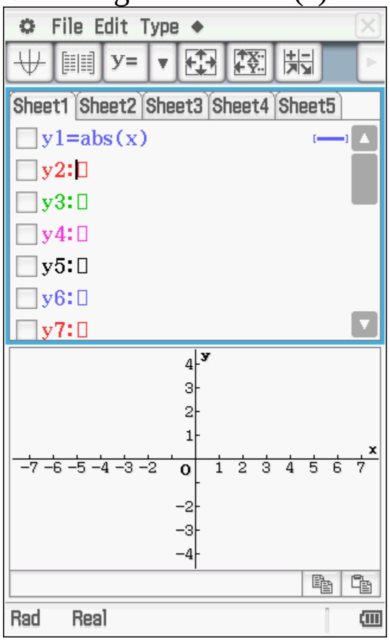
4.15 Absoluttfunksjonen

 Tegn grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = |x|$.

Absoluttegnet finner vi i Math2.

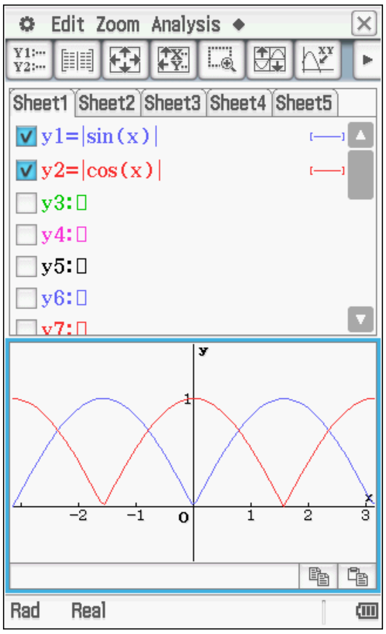


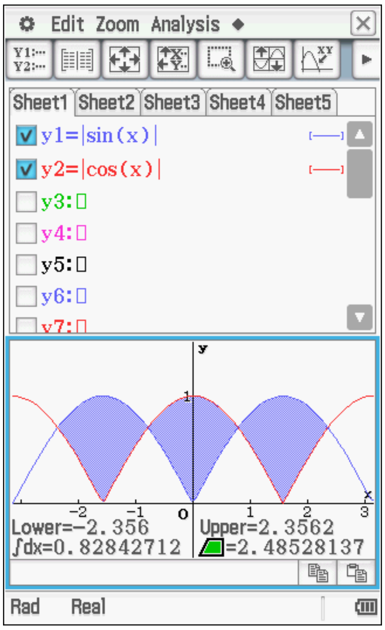
Vi kan også skrive abs(x).



Tegn grafene til funksjonene *f* og g gitt ved $f(x) = |\sin x|$ og $g(x) = |\cos x|$ i samme koordinatsystem. La $x \in [-\pi, \pi]$.

Vi lærer mer om trigonometriske funksjoner i kapitel 5. Øv på å avgrense områder og regne ut arealer**.**

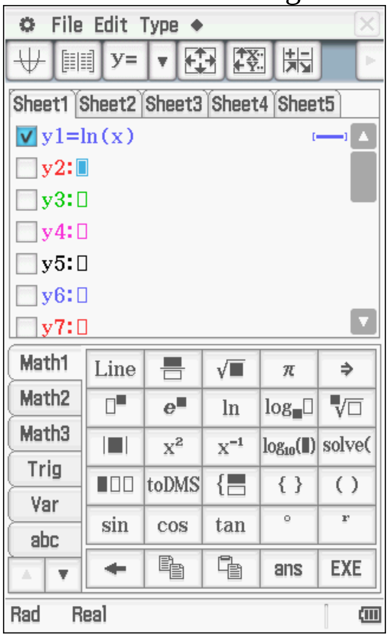




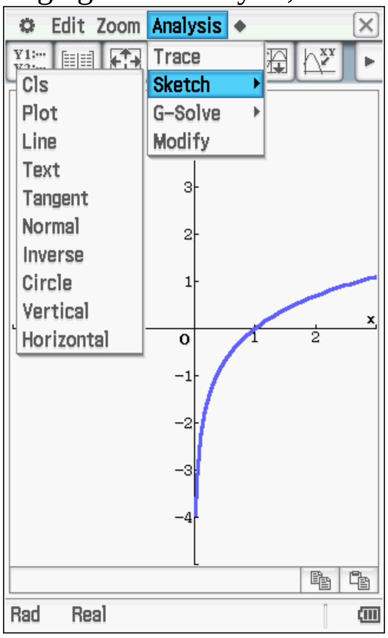
4.16 Inverse funksjoner

Tegn grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \ln(x)$.
Tegn grafen til den inverse funksjonen til *f*.

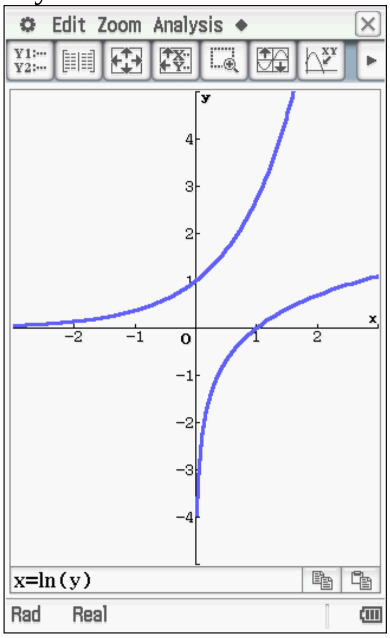
Vi finner ln i Math1 og Math2.

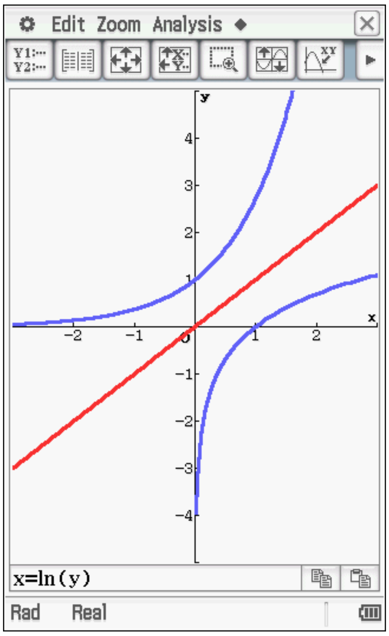


Tegn grafen. Analysis, Sketch.



Trykk Inverse.





Her er også $y = x$ tegnet. Hva observerer du?

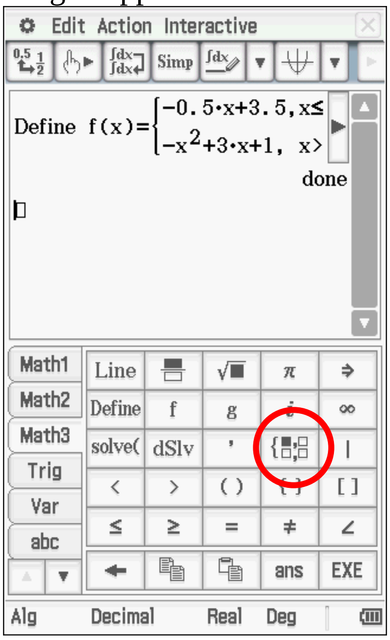
Den inverse funksjonen til $f(x) = \ln(x)$ er $g(x) = \mathrm{e}^x$.

4.17 Funksjoner med delt funksjonsuttrykk

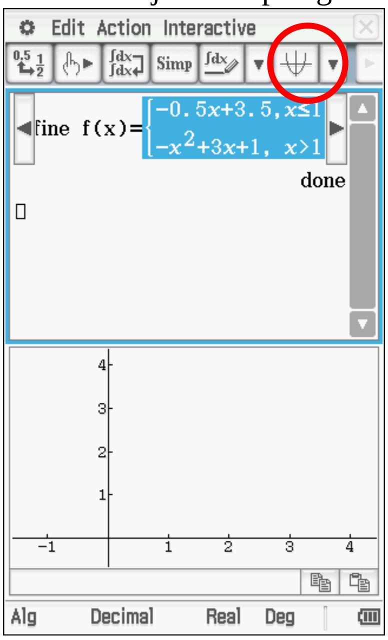
 Tegn grafen til $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + 3{,}5, & x \le 1 \\ -x^2 + 3x + 1, & x > 1 \end{cases}$

Undersøk om funksjonen er kontinuerlig for $x = 1$.

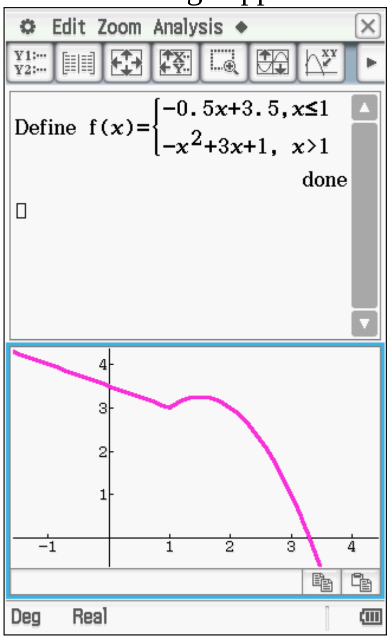
Velg knapp i Math3.

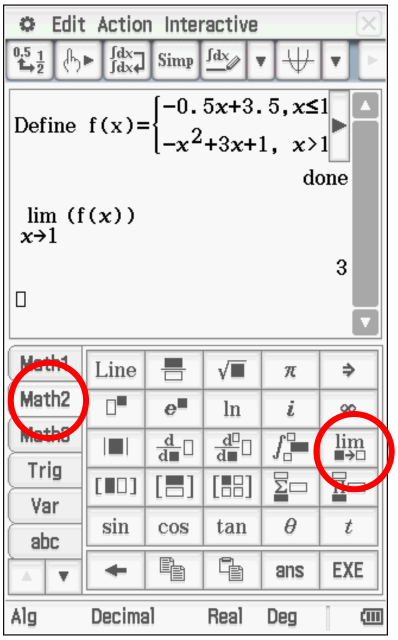


Skriv funksjonen. Åpne graf.



Marker. Dra og slipp.





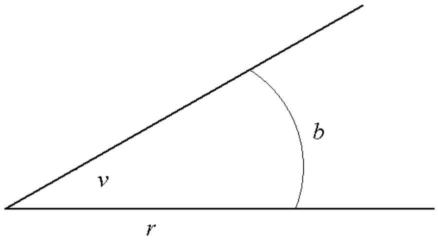
Funksjonen er kontinuerlig for $x = 1$.

Undersøk om funksjonen er deriverbar for $x = 1$.

5. Trigonometri

5.1 Grader og radianer

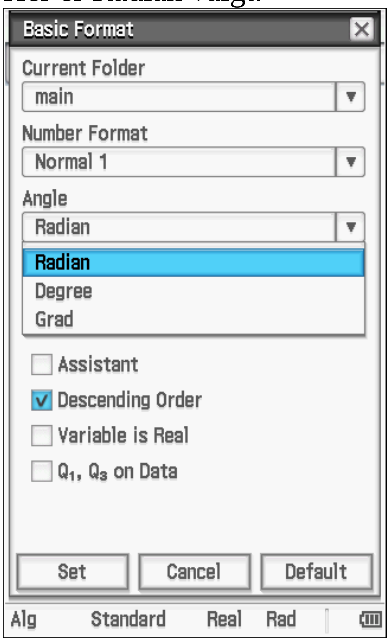
Absolutt vinkelmål (radianer) er gitt ved $v = \frac{b}{r}$.



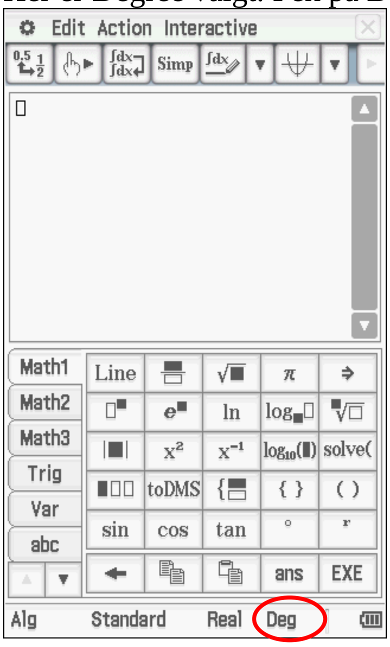
Hvis vi lar vinkelen være v radianer og n grader, så får vi at $\frac{v}{\pi} = \frac{n}{180^\circ}$.

I Basic Format kan vi velge mellom Radian, Degree og Grad. Vi vil i hovedsak konsentrere oss om Degree og Radian.

Her er Radian valgt.



Her er Degree valgt. Pek på Deg for å skifte til Rad eller Grad.

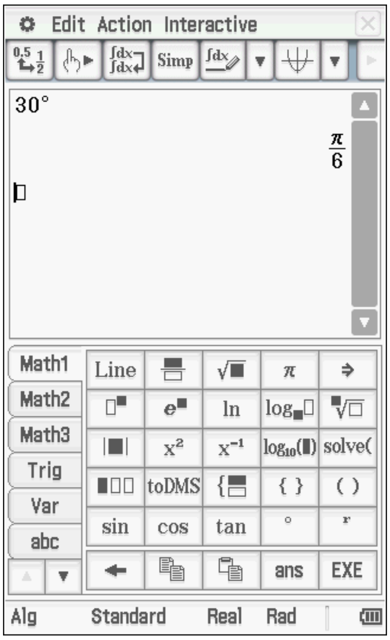


Det er svært viktig å være klar over om lommeregneren er stilt i Degree - eller Radian-mode.

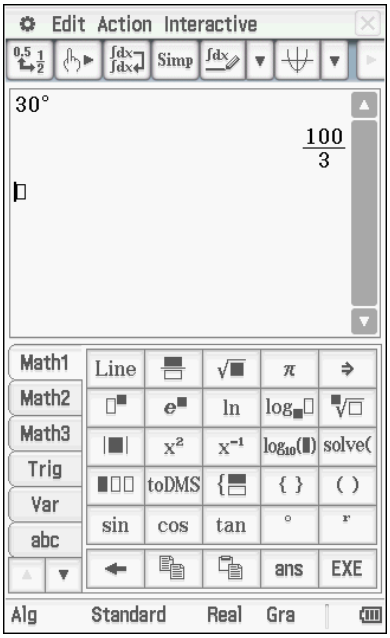
 Gjør om 30° til radianer.

Velg Rad-mode. Åpne Main. Skriv inn gradetallet, velg gradetegnet og trykk EXE.

Vi finner gradetegnet i Math1 eller i Trig.



Hvorfor?

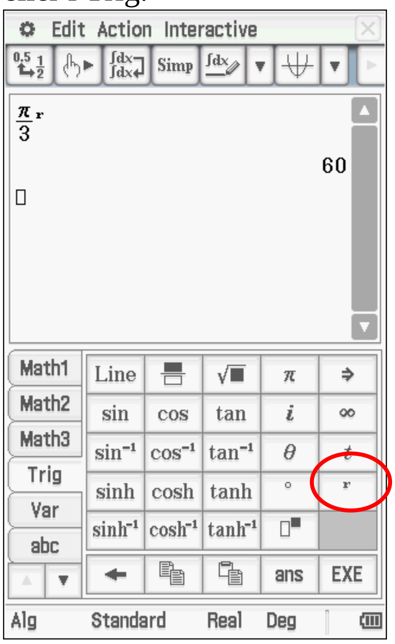


Merk at $30^{\circ} = \frac{100}{3}$ grad . Gjør om 400 grad til degree.

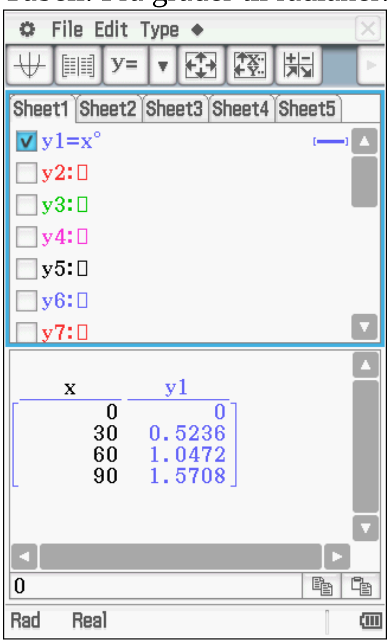
Gjør om $\frac{\pi}{3}$ til grader (degree).

Velg Deg-mode.

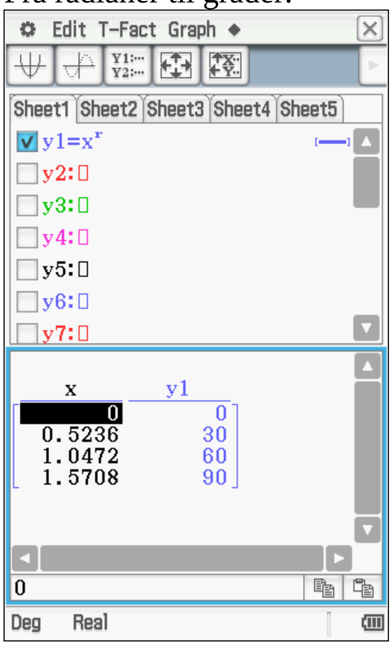
Vi finner radtegnet i Math1 eller i Trig.

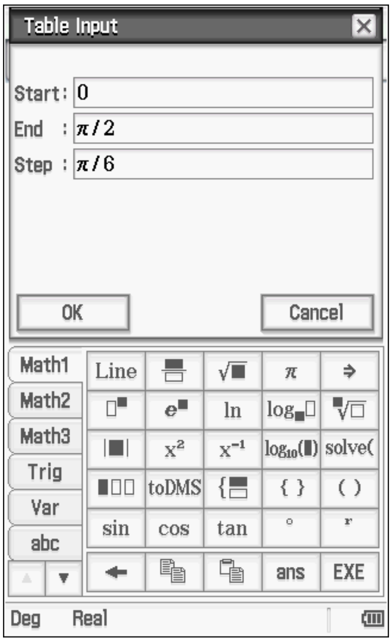


Tabell. Fra grader til radianer.



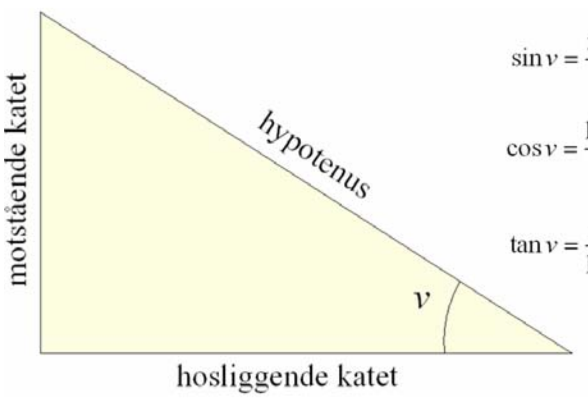
Fra radianer til grader.





Endre Table Input og skriv ut tabeller med forskjellig End og Step.

5.2 Beregne sinus, cosinus og tangens



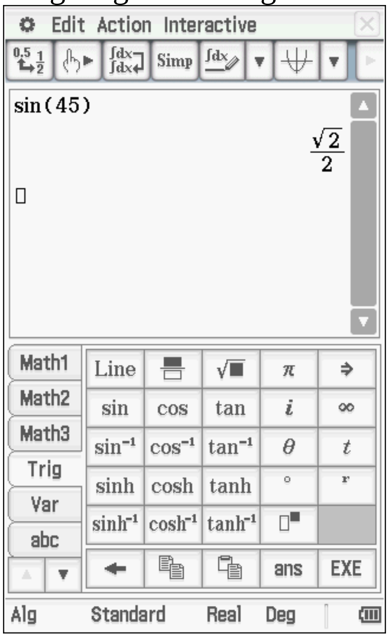
$$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$$

$$\cos v = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}}$$

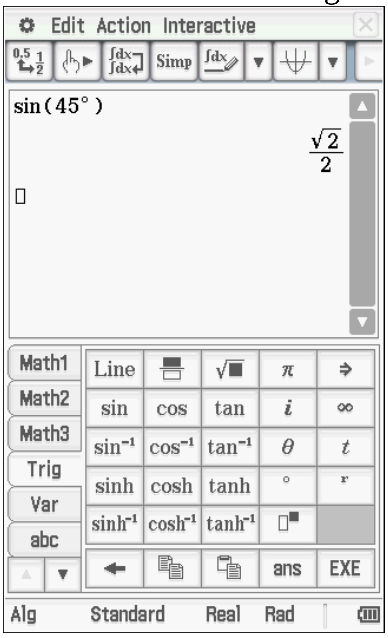
$$\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}}$$

 Sinus til 45°?

Velg Trig. Still i Deg-mode.

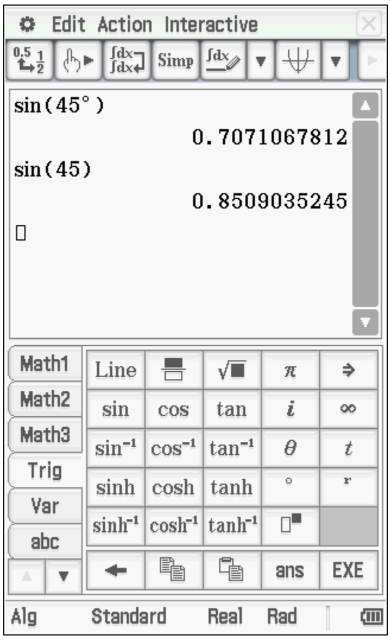


I Rad-mode må vi bruke gradetegnet.



Dersom lommeregneren står i Rad-mode, kan vi altså finne sinus til 45° ved å bruke gradetegnet bak 45. Selv om vi her har valgt Rad-mode, får vi riktig svar ved å bruke gradetegnet.

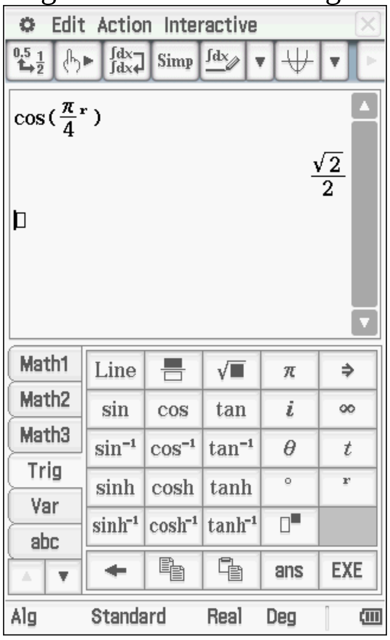
Uten gradetegnet vil lommeregneren finne sinus til 45 radianer.



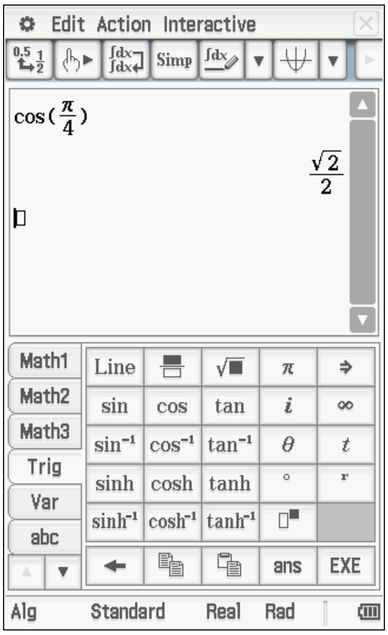
 Cosinus til $\frac{\pi}{4}$?

Dersom vi ikke har sjekket hvilken mode som er valgt for Angle, må vi bruke r bak $\frac{\pi}{4}$.

Deg-mode. r er nødvendig.

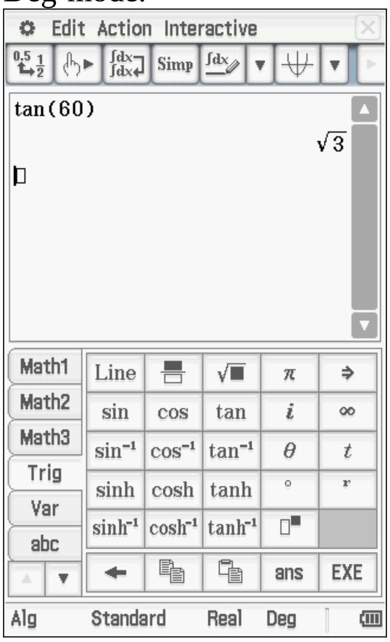


Rad-mode. r er unødvendig.

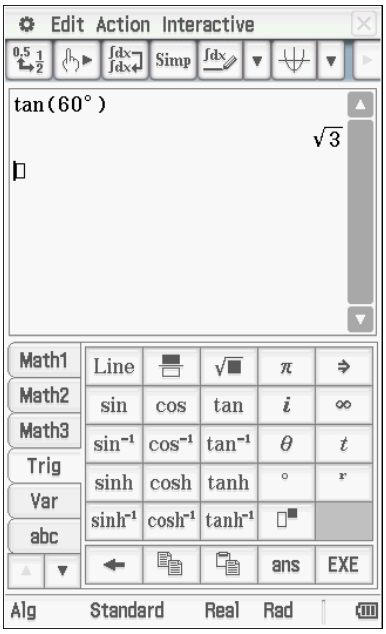


 Tangens til 60°?

Deg-mode.



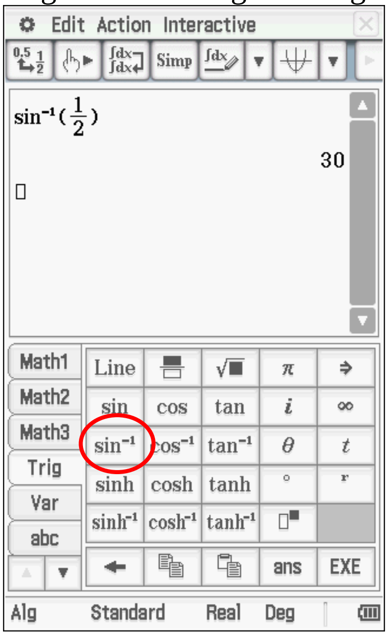
Rad-mode. Gradetegnet er påkrevd.



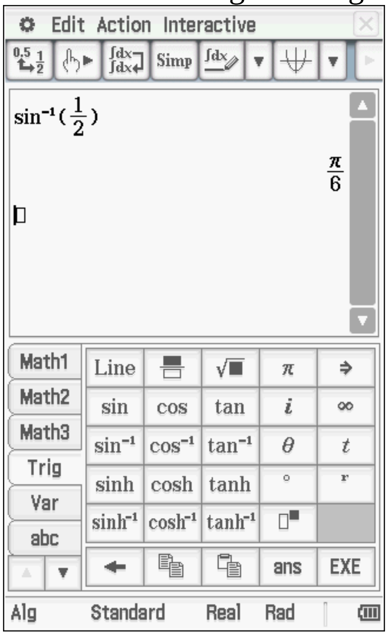
5.3 Beregne vinkelen


Bestem vinkel v når $\sin v = \dfrac{1}{2}$

Deg-mode for Angle er valgt.

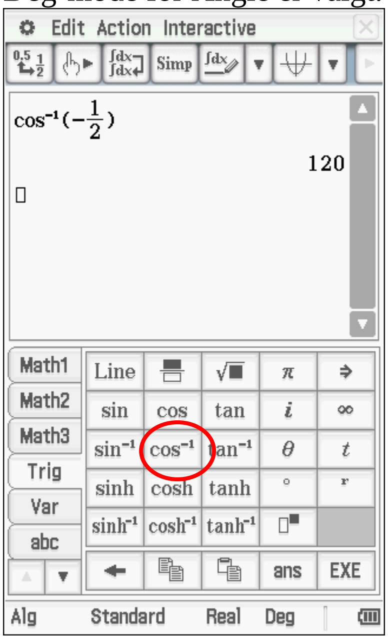


Rad-mode for Angle er valgt.

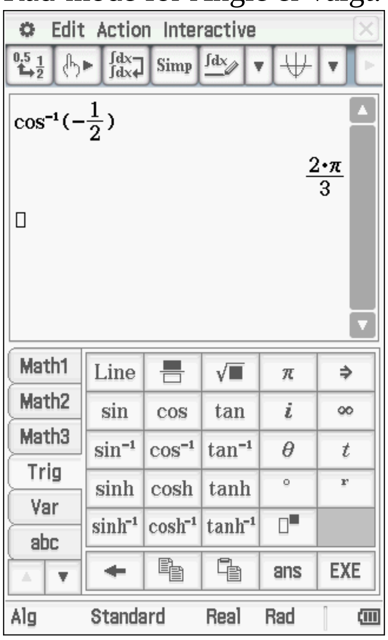



Bestem vinkel v når $\cos v = -\dfrac{1}{2}$.

Deg-mode for Angle er valgt.

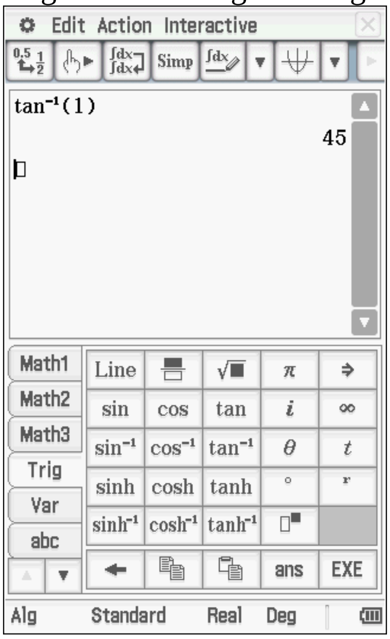


Rad-mode for Angle er valgt.

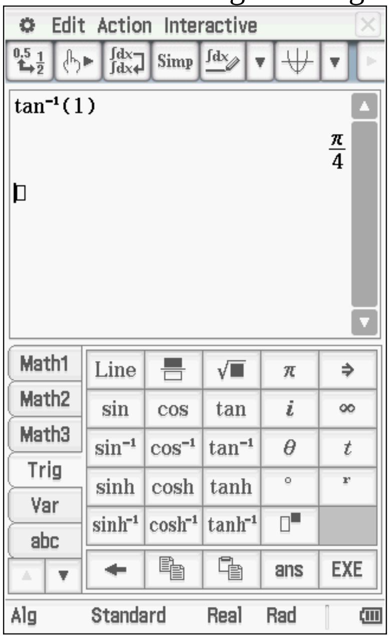


 Bestem vinkel v når $\tan v = 1$.

Deg-mode for Angle er valgt.



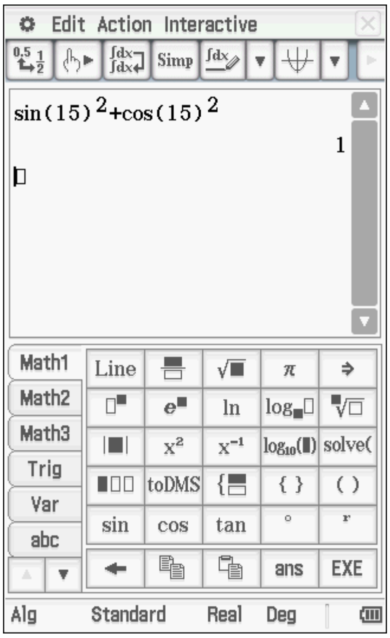
Rad-mode for Angle er valgt.



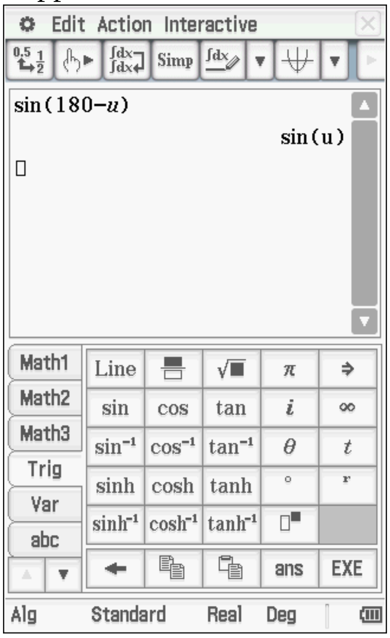
 Bruk lommeregneren til å verifisere formlene nedenfor.

Enhetsformelen	$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	
Motsatte vinkler	$\sin(-u) = -\sin u$ $\cos(-u) = \cos u$ $\tan(-u) = -\tan u$	
Supplementvinkler	$\sin(180^\circ - u) = \sin u$ $\cos(180^\circ - u) = -\cos u$ $\tan(180^\circ - u) = -\tan u$	
Komplementvinkler	$\sin(90^\circ - u) = \cos u$ $\cos(90^\circ - u) = \sin u$	
Sum og differanse	$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$ $\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$ $\tan(u \pm v) = \dfrac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$	Av dette følger: $\sin 2u = 2\sin u \cdot \cos u$ $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$ $= 2\cos^2 u - 1$ $= 1 - 2\sin^2 u$ $\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$

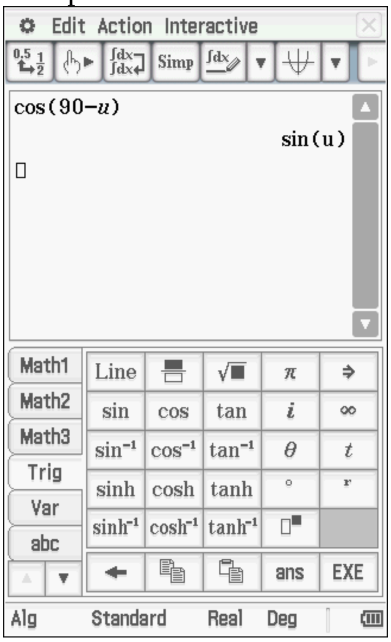
Enhetsformelen.



Supplementvinkler.



Komplementvinkler.



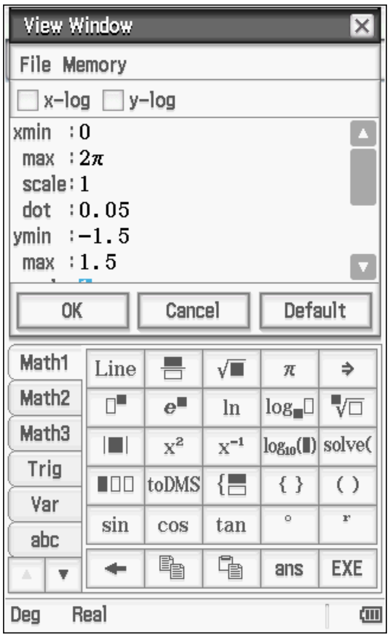
Verifiser de andre formlene på egen hånd.

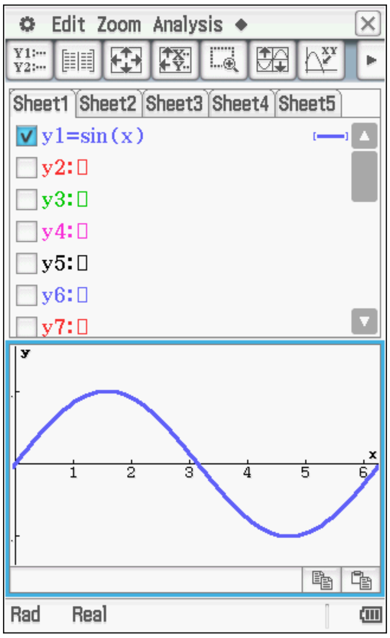
5.4 Trigonometriske funksjoner og grafer

 Tegn grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = \sin x$ der $x \in [0, 2\pi]$

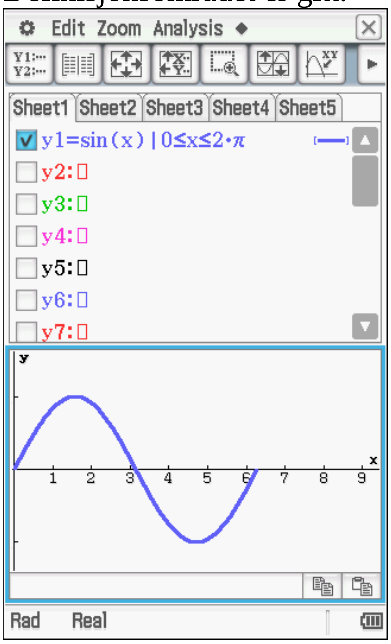
Sett Angle i Rad-mode. Velg Graph & Table i hovedmenyen.

Juster View Window slik.





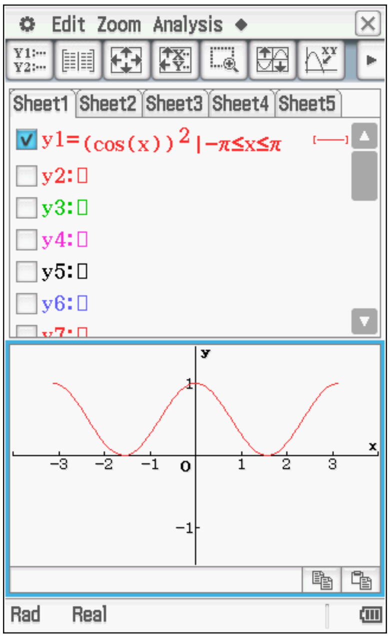
Juster vinduet.
Definisjonsområdet er gitt.



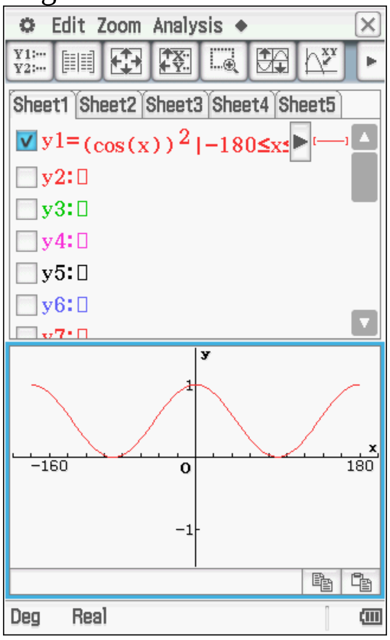
Øv på egen hånd med å bestemme ekstremalpunkter og nullpunkter. Bruk G-Solve.

Tegn grafen til g gitt ved $g(x)=\cos^2(x)$ der $x\in[-\pi,\pi]$.

Rad-mode.

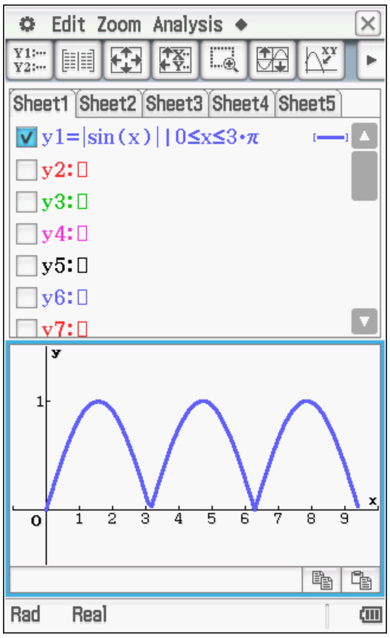


Deg-mode.

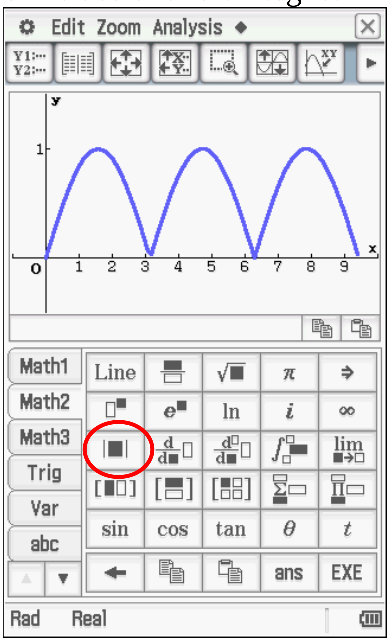


Siden definisjonsområdet er valgt, vil vi kun se grafen i området $x\in[-\pi,\pi]$

Tegn grafen til h der $h(x)=|\sin x|$ og der $x\in[0,3\pi]$

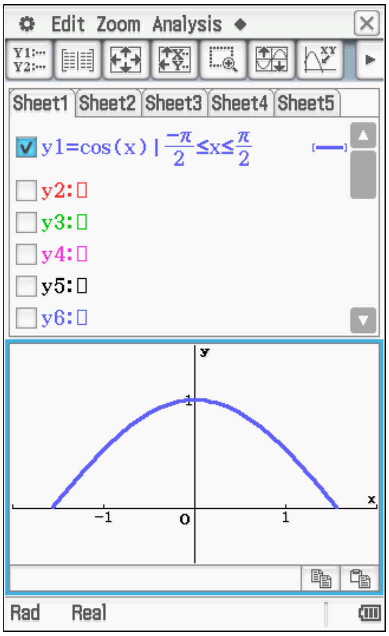


Skriv abs eller bruk tegnet i Math2.

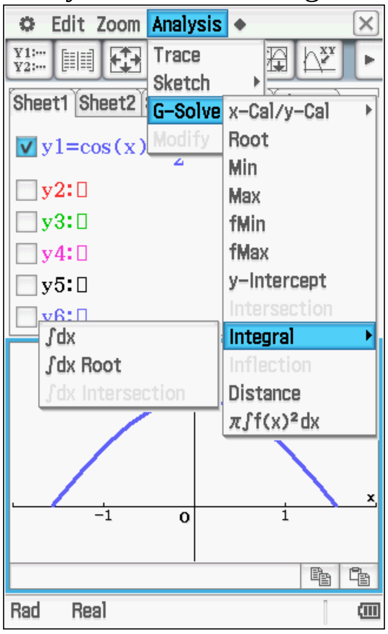


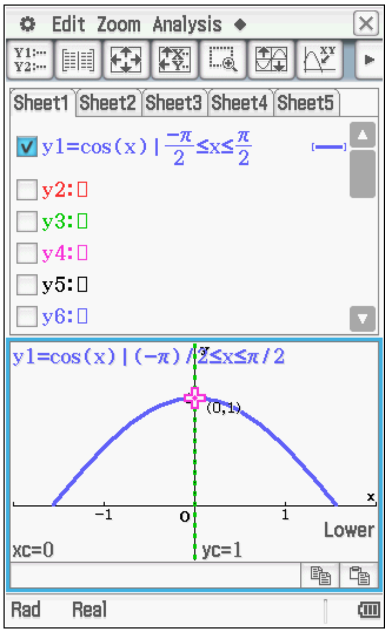
Regn ut arealet til området som er avgrenset av x-aksen og grafen til f gitt ved

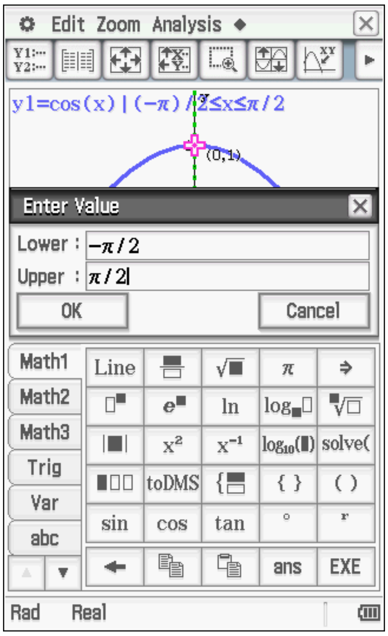
$$f(x) = \cos x \quad \text{der} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

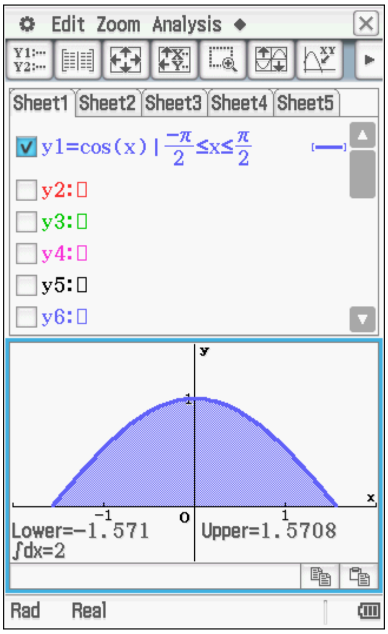


Analysis, G-Solve, Integral.

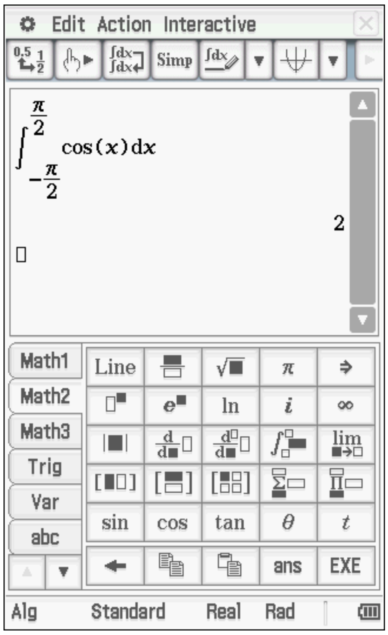








Kontroll.



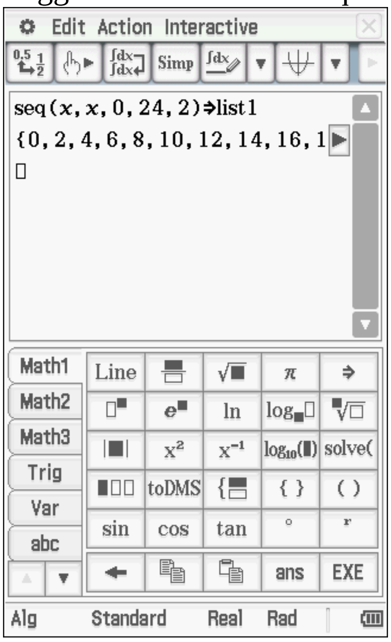
Arealet til det avgrensede området er lik 2.

Et sommerdøgn i juli ble utetemperaturen målt. Målingene ble foretatt annenhver time. Temperaturen er målt i celsiusgrader (^{o}C), og x er antall timer etter midnatt.

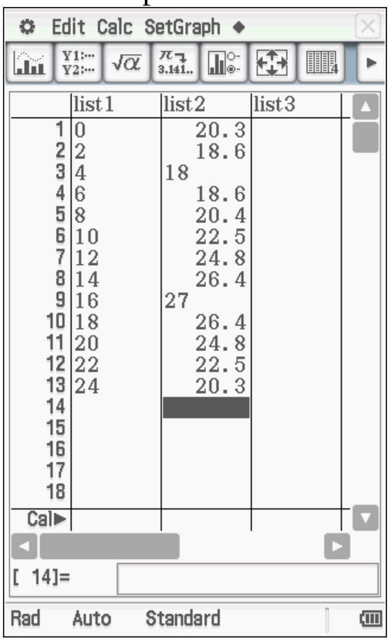
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Utetemperatur	20,3	18,6	18,0	18,6	20,4	22,5	24,8	26,4	27,0	26,4	24,8	22,5	20,3

Finn et funksjonsuttrykk som passer til de målte temperaturene. Tegn grafen.

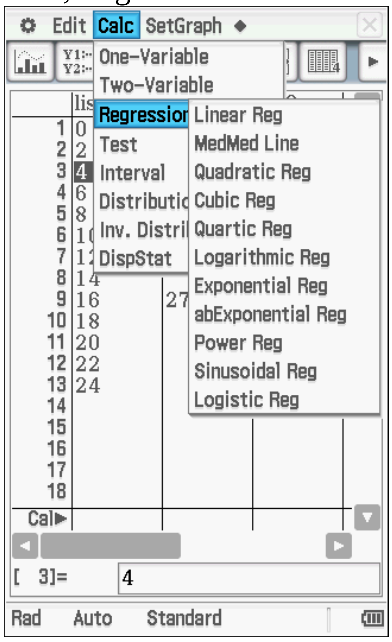
Legg timene i list1 vha seq.



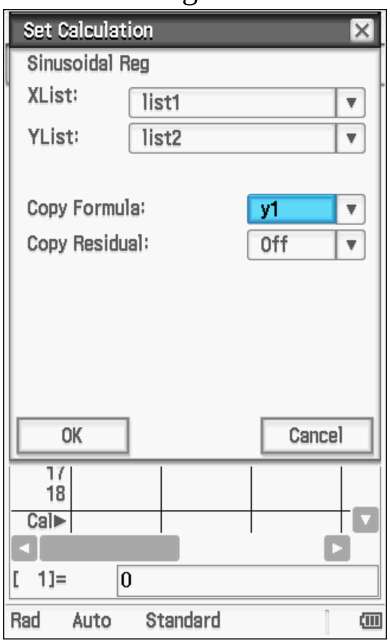
Skrive temperturene i list2.

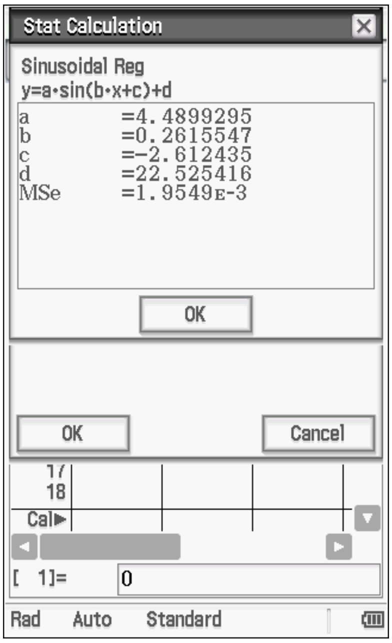


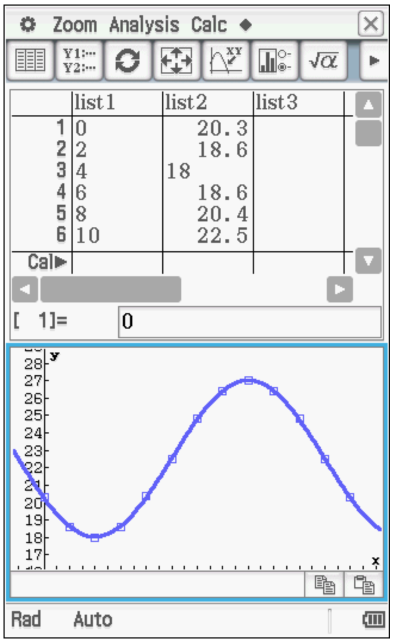
Calc, Regression.



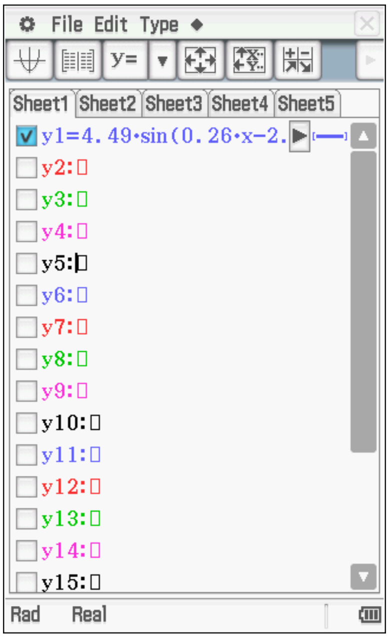
Sinusoidal Reg.

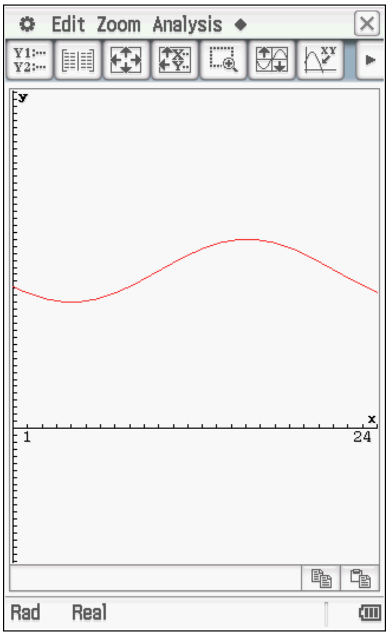




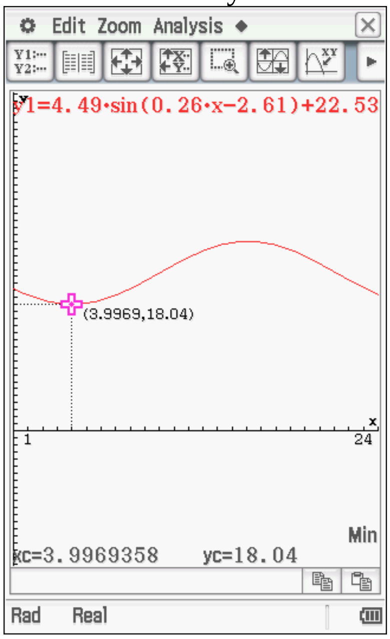


Funksjonen Y = 4,49sin(0.26x – 2.61) + 22.53 beskriver temperaturutviklingen i løpet av dette døgnet. Vi har kopiert over til y1 i Graph & Table.





Grafen kan analyseres.



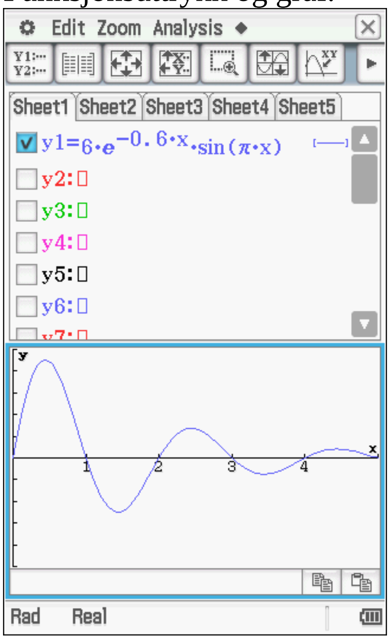
 Når et fly faller ned i en luftlomme, begynner vingespissen å vibrere. Utslaget til vingespissen etter t sekunder er gitt ved

$$f(t) = 6e^{-0{,}6t} \cdot \sin(\pi t)$$, der $f(t)$ er målt i centimeter.

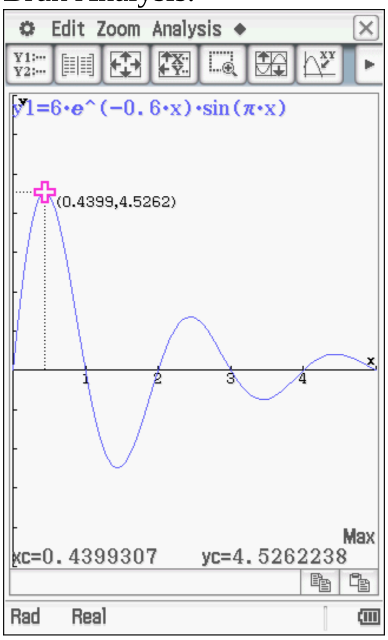
Tegn grafen til f og bestem det maksimale utslaget til vingespissen.

Still lommeregneren i Rad-mode. Velg følgende vindu: xmin: 0, xmax: 5, ymin: -5 og ymax: 5. Førsteaksen viser tiden i sekunder. Andreaksen viser vingeutslaget i centimeter.

Funksjonsuttrykk og graf.



Bruk Analysis.



Maksimalt utslag inntreffer etter 0,44 sekunder og er omtrent 4,5 cm.

5.5 Trigonometriske likninger

Grunnlikningene med sinus, cosinus og tangens har disse generelle løsningene i radianer:

$$\cos u = a \ \text{ gir } \begin{cases} u = u_0 + n\cdot 2\pi \\ u = -u_0 + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

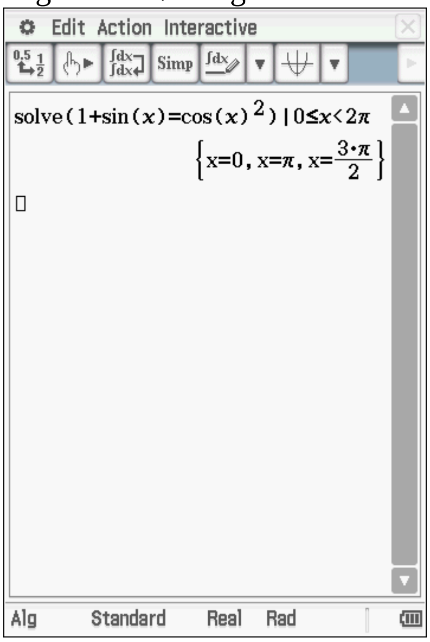
$$\sin u = b \ \text{ gir } \begin{cases} u = u_0 + n\cdot 2\pi \\ u = \left(\pi - u_0\right) + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\tan u = c \ \text{ gir } \ u = u_0 + n\cdot \pi$$

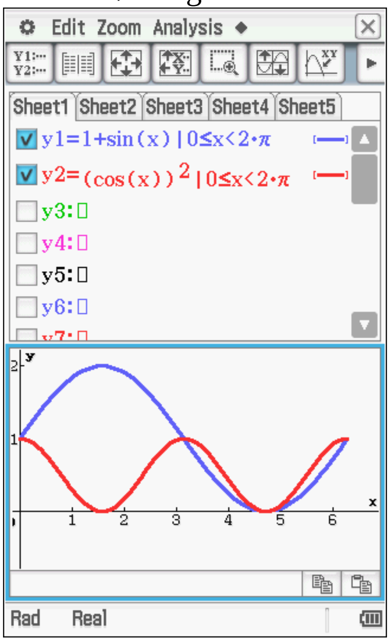
hvor u_0 er løsningen du får på lommeregneren.

Løs likningen: $1+\sin x = \cos^2 x$ der $x \in \left[0,\, 2\pi\right\rangle$

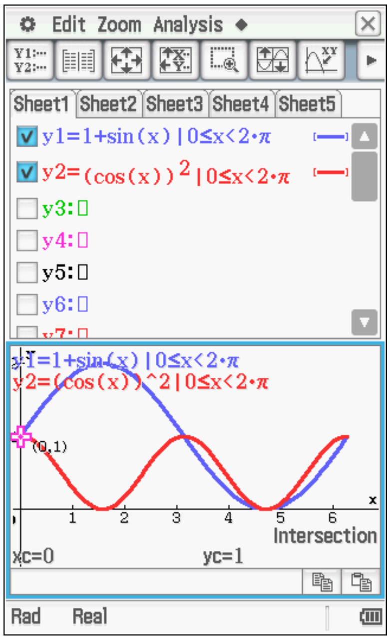
Algebraisk løsning.



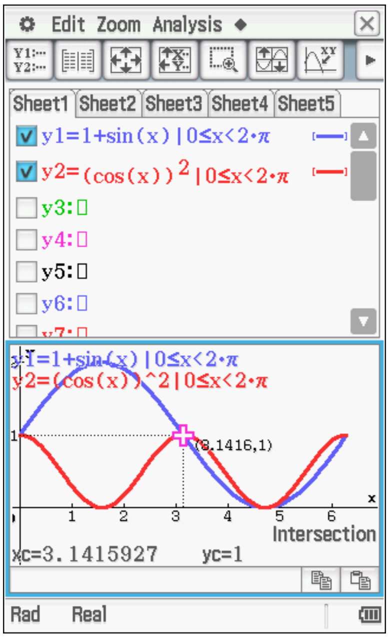
Grafisk løsning.

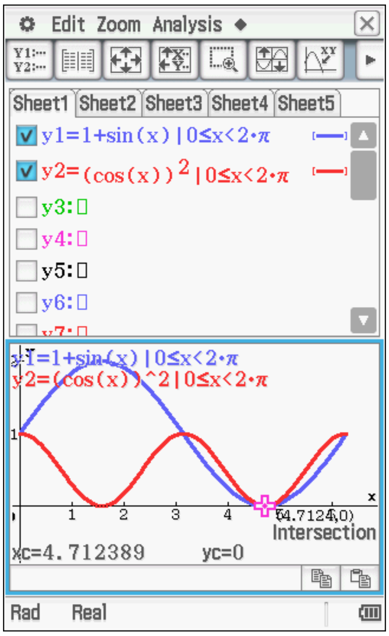


Intersection.



Trykk pil mot høyre.



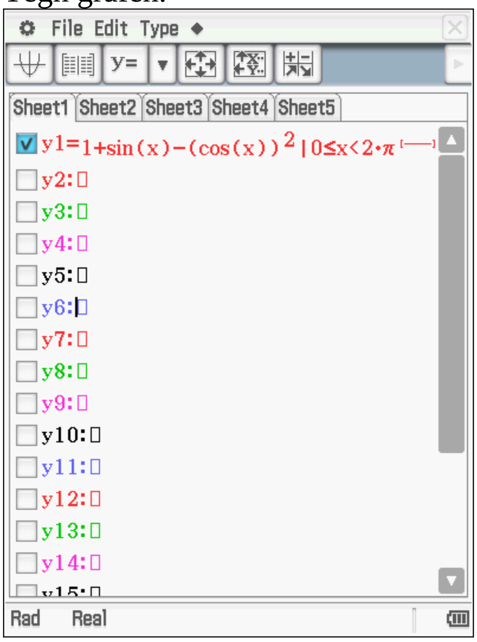


Løsning: $x=0$, $x=\pi$ og $x=\dfrac{3\pi}{2}$. Merk at $x=2\pi$ ikke er en løsning siden $x\in[0,\,2\pi\rangle$.
Den grafiske løsningen bekrefter den algebraiske løsningen.

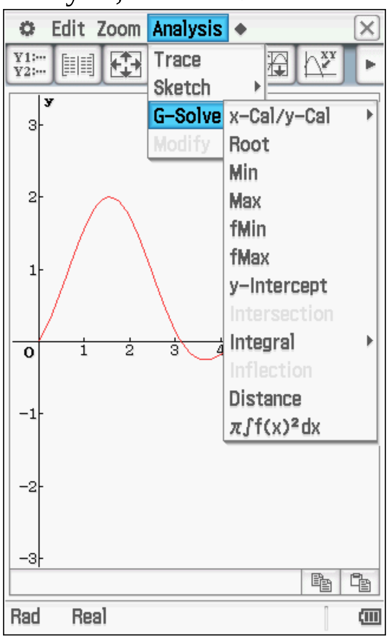
Grafisk løsning – alternativ II:

Likningen omformes til: $1+\sin x-\cos^2 x=0$ der $x\in[0,\,2\pi\rangle$.

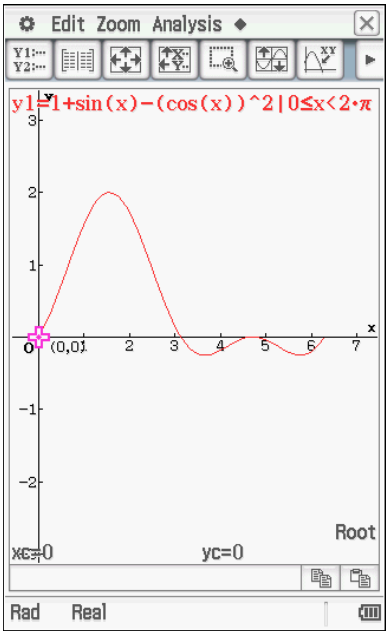
Legg venstre side inn som y1.
Tegn grafen.



Analysis, G-Solve.



Root.



Merk at $x=2\pi$ ikke er en løsning siden $x\in[0,\,2\pi\rangle$.

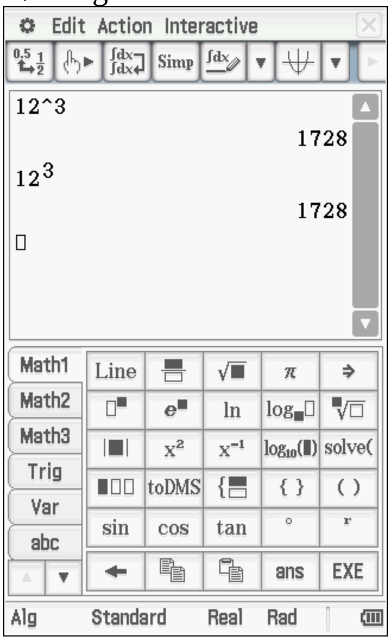
6. Kombinatorikk, sannsynlighet og statistikk

6.1 Ordnet utvalg med tilbakelegging

Ordnet utvalg med tilbakelegging	$N = n^r$	Vi trekker r elementer fra n elementer med tilbakelegging. Rekkefølgen har betydning.

Vi trekker 3 elementer med tilbakelegging ut av en forekomst på 12 elementer. Hvor mange ordnede utvalg kan vi få?

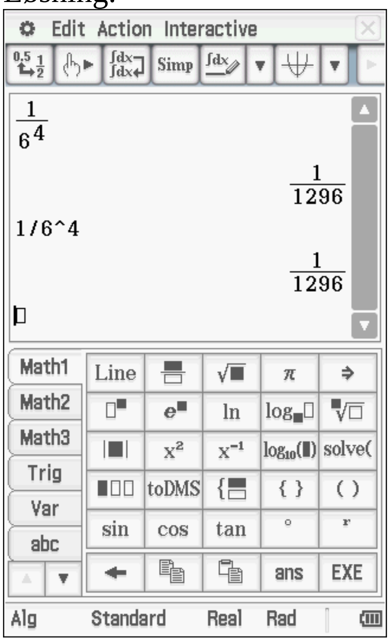
Løsning.

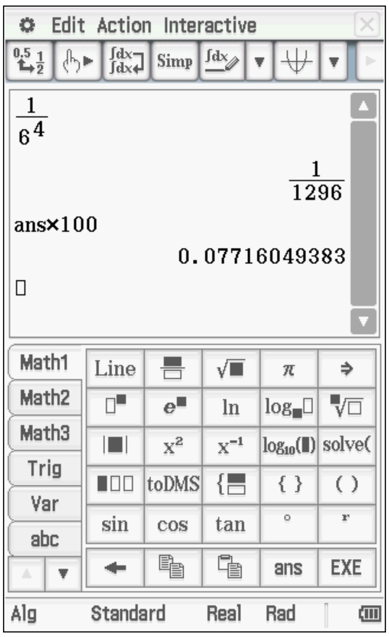


Antall ordnede utvalg med tilbakelegging er 1728.

Hvor stor er sannsynligheten for å få yatzy i ett kast?

Løsning.





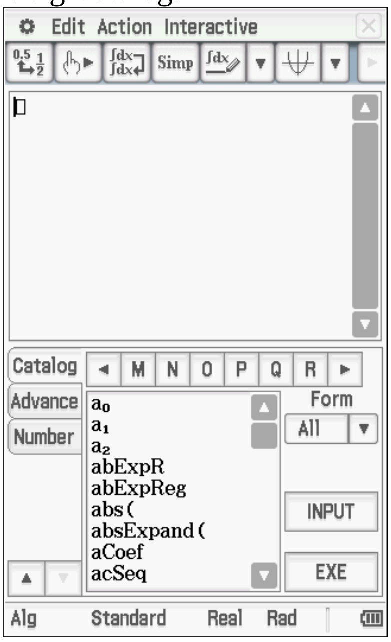
Sannsynligheten er 0,077 %.

6.2 Ordnet utvalg uten tilbakelegging

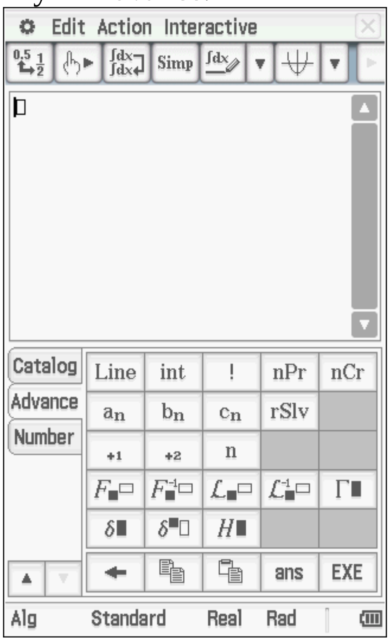
Ordnet utvalg uten tilbakelegging	$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$	Vi trekker r elementer fra n elementer uten tilbakelegging. Rekkefølgen har betydning.

Bestem antall muligheter for å trekke 5 kort ut av en samling på 13 kort, når vi tar hensyn til rekkefølgen (permutasjoner) på de 5 kortene vi trekker ut.

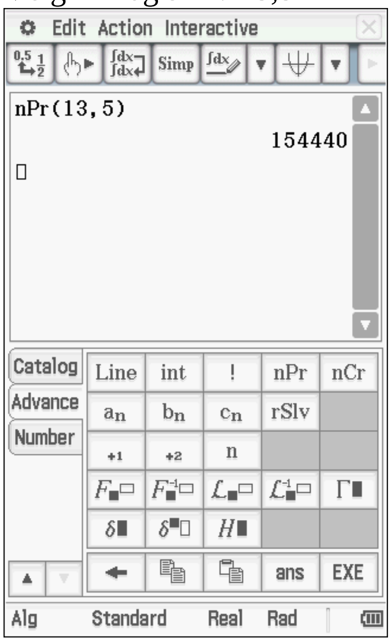
Velg Catalog.



Trykk Advance.

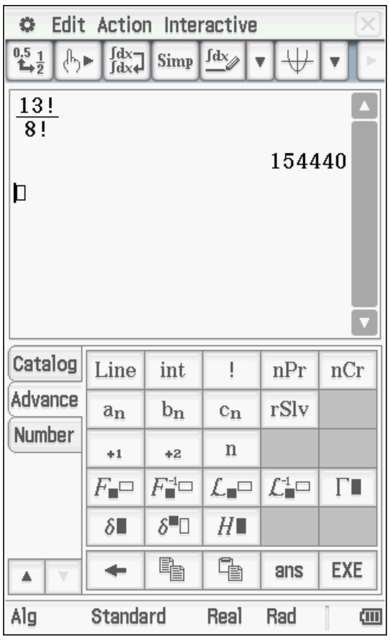


Velg nPr og skriv 13,5



Svar: Antall muligheter er 154 440.

Kontroll:



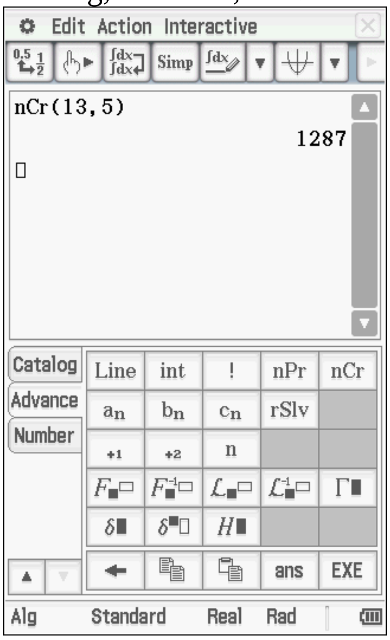
Fakultet finner vi til venstre for nPr.

6.3 Uordnet utvalg uten tilbakelegging

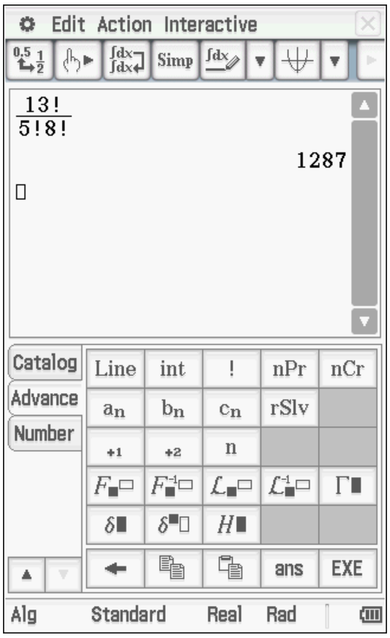
Uordnet utvalg *uten* tilbakelegging	$n\mathrm{C}r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$	Vi trekker r elementer fra n elementer uten tilbakelegging. Rekkefølgen har ingen betydning.

Bestem antall muligheter for å trekke 5 kort ut av en samling på 13 kort, når vi ikke tar hensyn til rekkefølgen på de 5 kortene vi trekker ut.

Catalog, Advance, nCr.



Kontroll:



Svar: Antall muligheter er 1287.

6.4 Binomiske forsøk

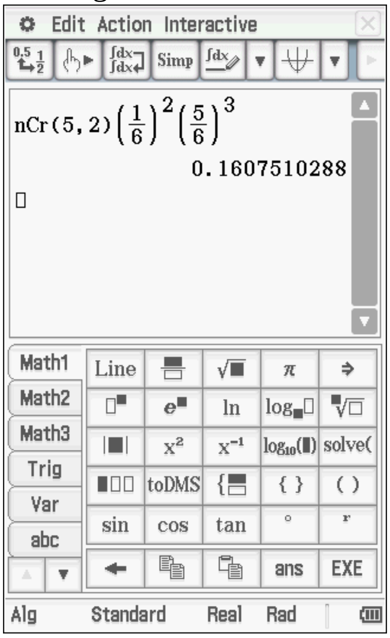
Vi skal nå se på forsøk som blir gjentatt n ganger. Hvert enkelt forsøk har bare to mulige utfall, kalt suksess og ikke suksess. Sannsynligheten for suksess er den samme i hvert enkelt forsøk. Utfallene av de ulike forsøkene er uavhengige. Dette kaller vi binomiske forsøk.

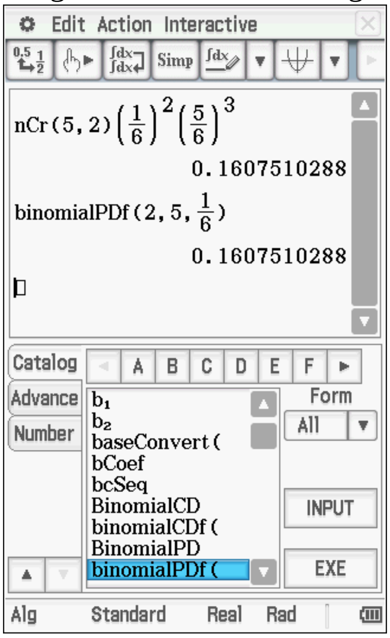
Binomiske forsøk Sannsynligheten for at en suksess inntreffer x ganger av n	$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ $x = 0,1,2,3,\ldots,n$	Antall uavhengige forsøk er n. p er den konstante sannsynlighet for suksess. Antall suksesser er x.

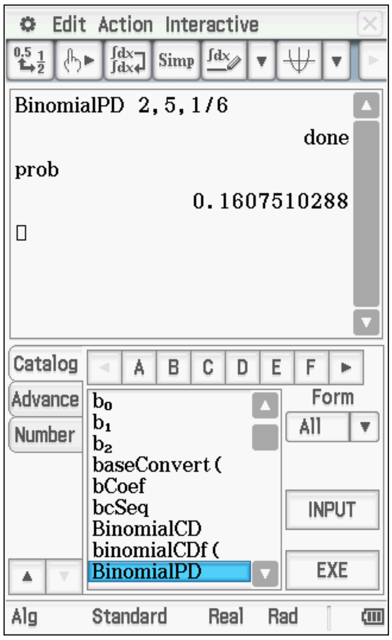
Vi kaster en vanlig terning 5 ganger. Hvor stor er sannsynligheten for å få to seksere?

Sannsynligheten for å få sekser er $\frac{1}{6}$. Det betyr at sannsynligheten for ikke å få sekser er $\frac{5}{6}$.

Løsning. Velg binomialPDf i Catalog. Alternativt.



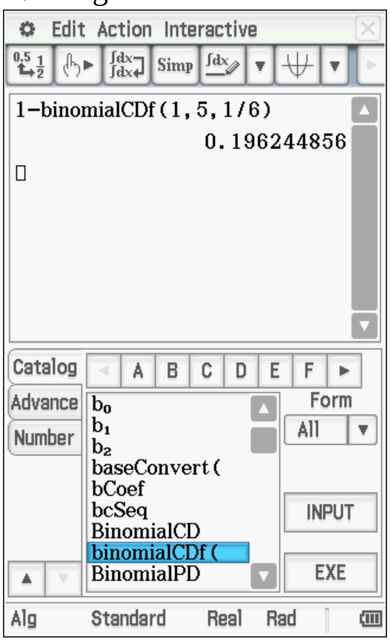


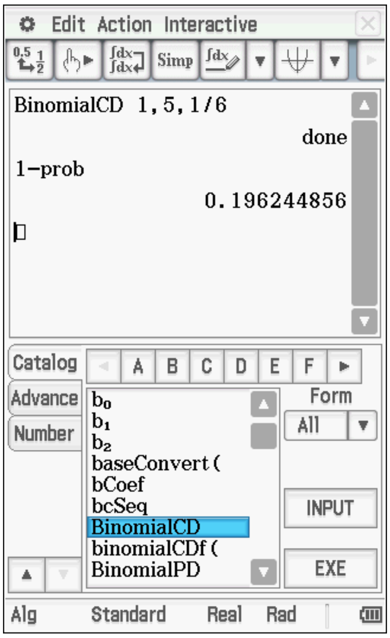


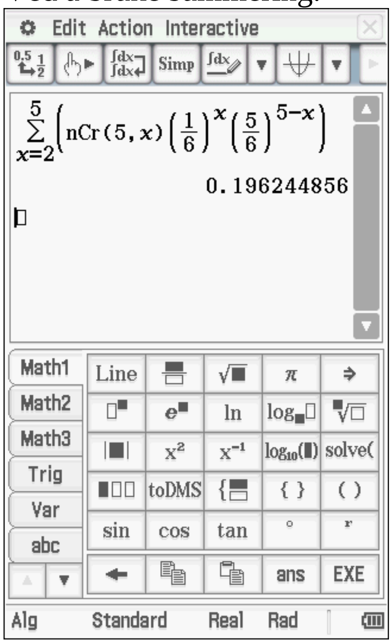
Sannsynligheten for å få to seksere er 0,16.

Vi kaster en vanlig terning 5 ganger. Hvor stor er sannsynligheten for å få minst to seksere?

Løsning. Alternativt. Ved å bruke summering.





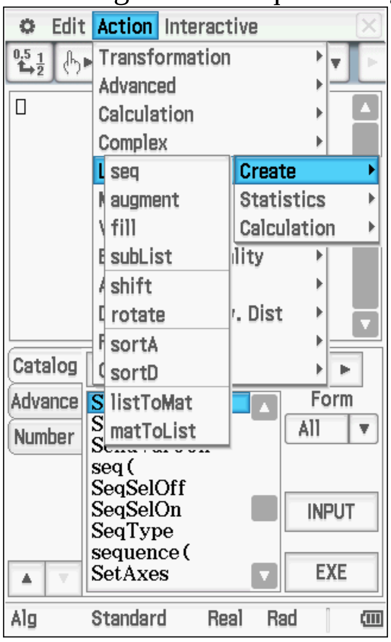


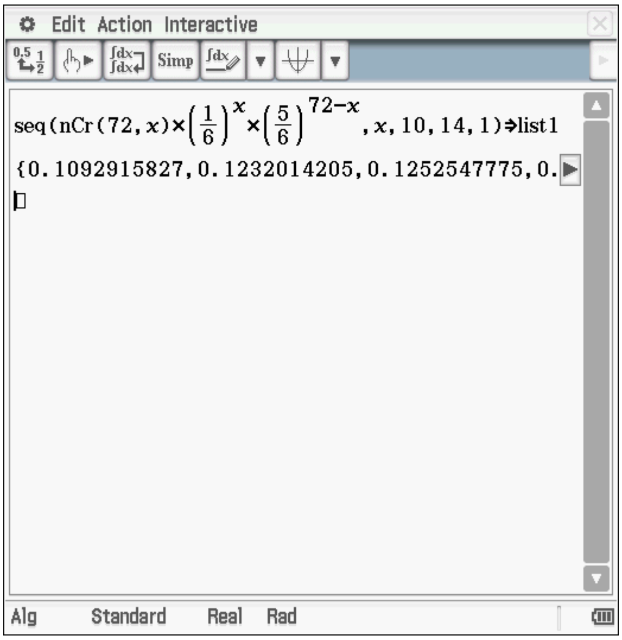
$\text{BinomialCD}(1,5,\frac{1}{6})$ gir sannsynligheten for 0 eller 1 sekser i 5 kast. Sannsynligheten for minst to seksere er derfor $1-\text{BinomialCD}(1,5,\frac{1}{6})$.

Vi kaster en vanlig terning 72 ganger.
Hvor stor er sannsynligheten for å få mellom 10 og 14 seksere?

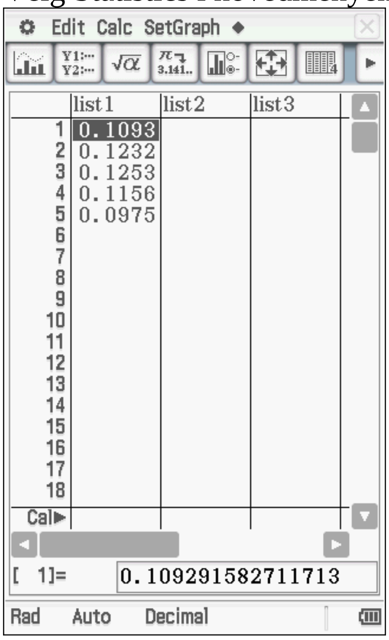
Vi skal altså bestemme $P(10 \le X \le 14)$ der X er antall seksere.

Vi kan også finne seq i Catalog.

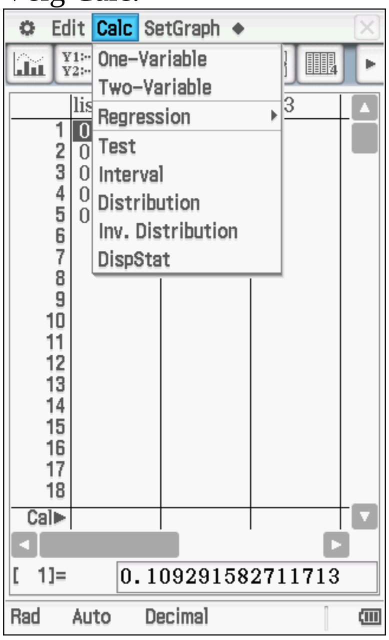




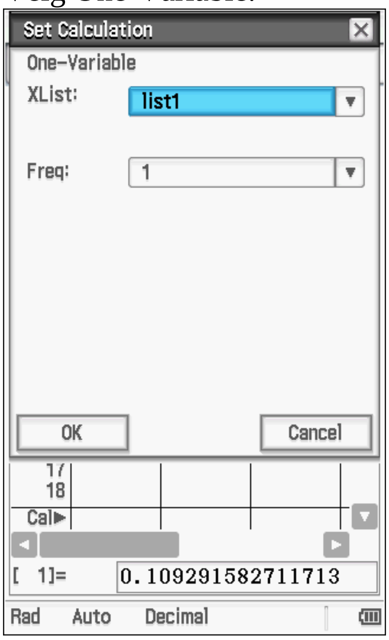
Velg Statistics i hovedmenyen.

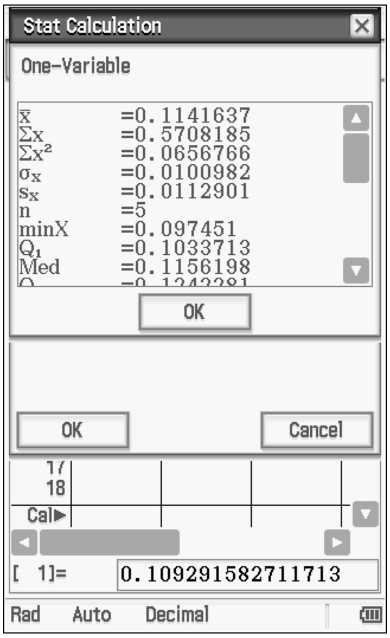


Velg Calc.

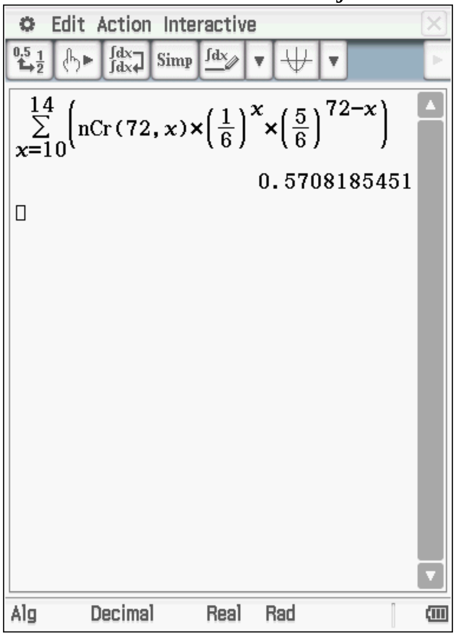


Velg One-Variable.





Alternativt med sumfunksjonen.



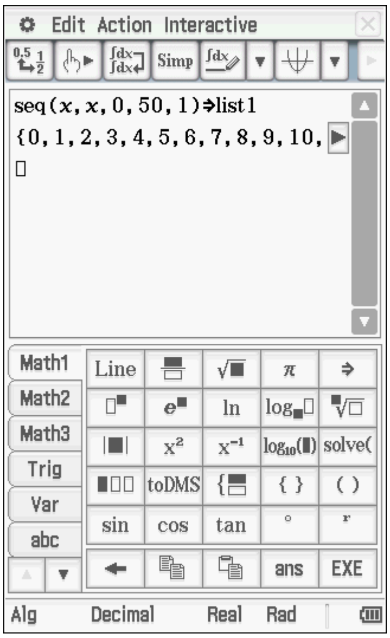
Sannsynligheten $P(10 \le X \le 14) = 0{,}57$.

6.5 Binomisk fordeling

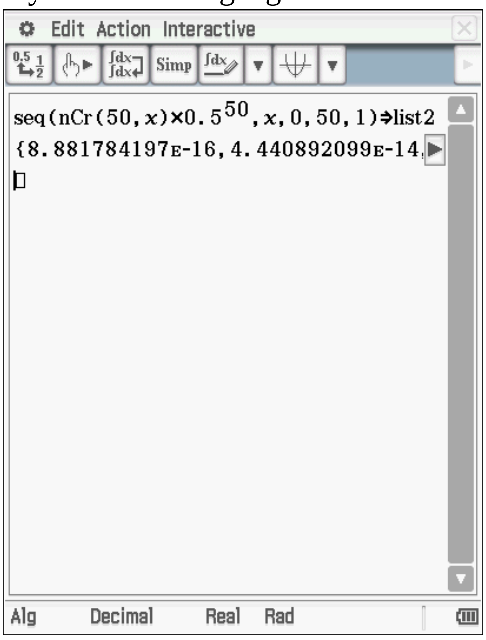
Vi kaster en mynt 50 ganger. La X være antall ganger vi får krone. Sannsynlighetsfordelingen til X blir en binomisk fordeling. Sannsynligheten for suksess er nøyaktig $p = 0{,}5$. Enten får vi krone eller mynt i et kast.


Framstill sannsynlighetsfordelingen i forsøket ovenfor.

Legg utfallsrommet inn i list1.

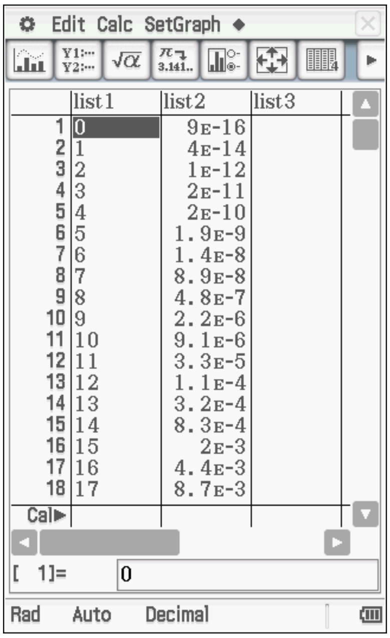


Legg punktsannsynlighetene for å få mynt fra 0 til 50 ganger inn i list2.

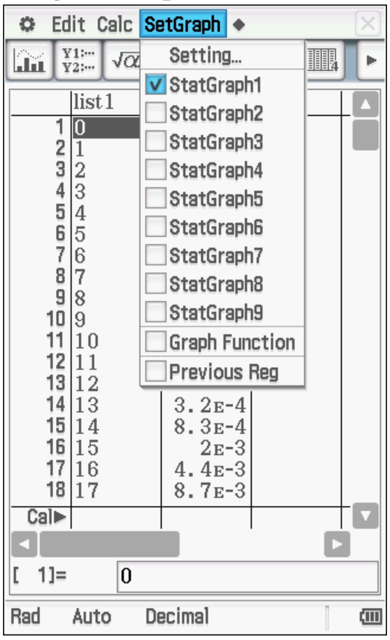


Vi merker oss at $P(X = x) = \binom{50}{x} \cdot 0{,}5^{x} \cdot 0{,}5^{50-x} = \binom{50}{x} \cdot 0{,}5^{50}$

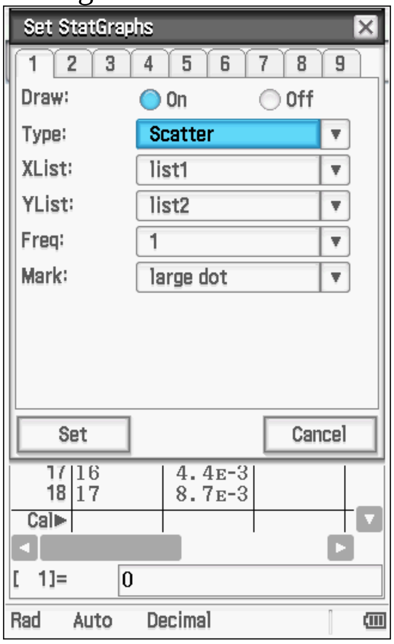
Velg Statistics i hovedmenyen.



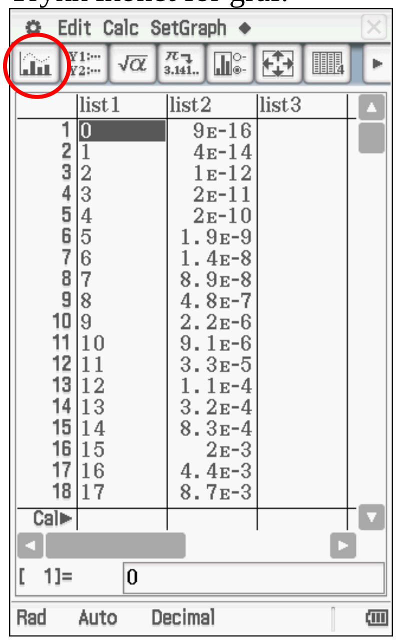
Velg SetGraph.

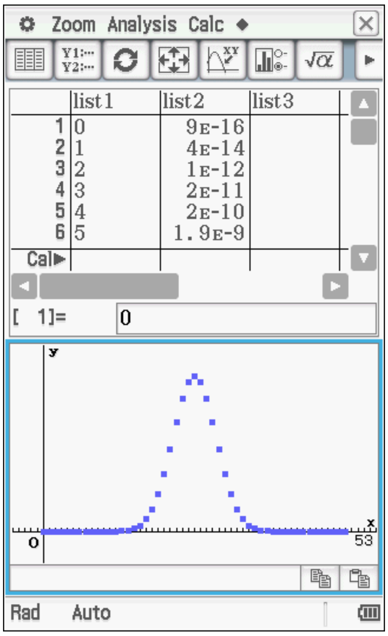


Setting.



Trykk ikonet for graf.



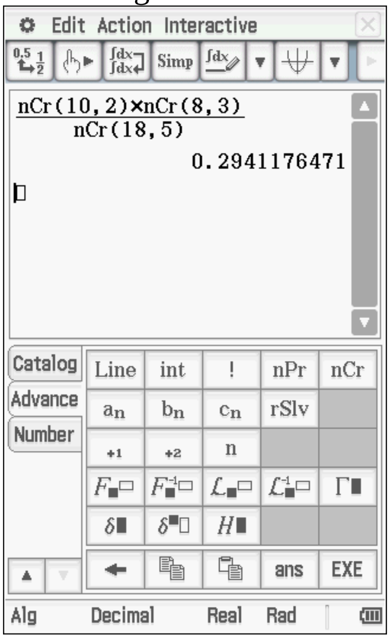


6.6 Hypergeometrisk fordeling

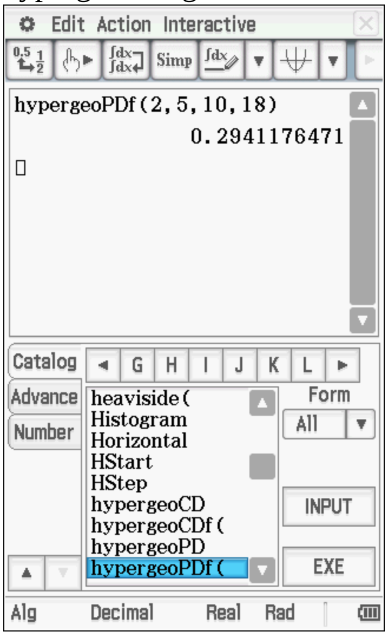
Hypergeometrisk fordeling X er antall spesielle i utvalget	$P(X=x)=\dfrac{\dbinom{M}{x}\cdot\dbinom{N-M}{n-x}}{\dbinom{N}{n}}$	Populasjon med N elementer består av M spesielle. Vi velger tilfeldig n elementer.

Vi har 10 hvite og 8 røde kuler i en eske og trekker 5 kuler helt tilfeldig. Hvor stor er sannsynligheten for å trekke 2 hvite og 3 røde kuler?

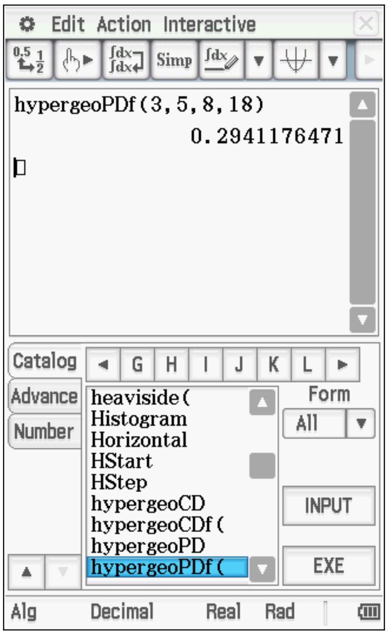
Formelen gir.



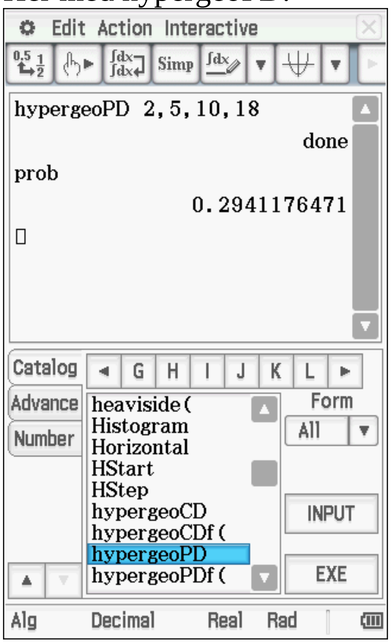
hypergeoPDf gir.

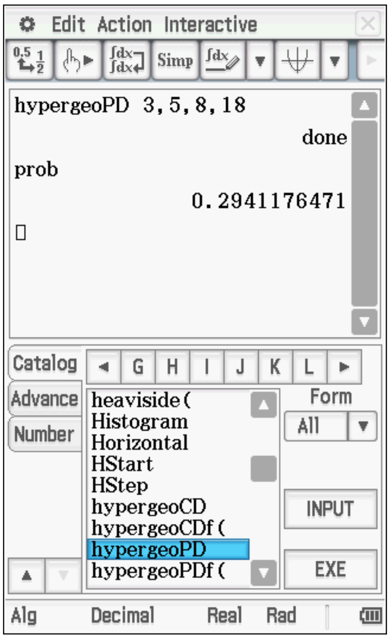


Hvorfor samme svar?

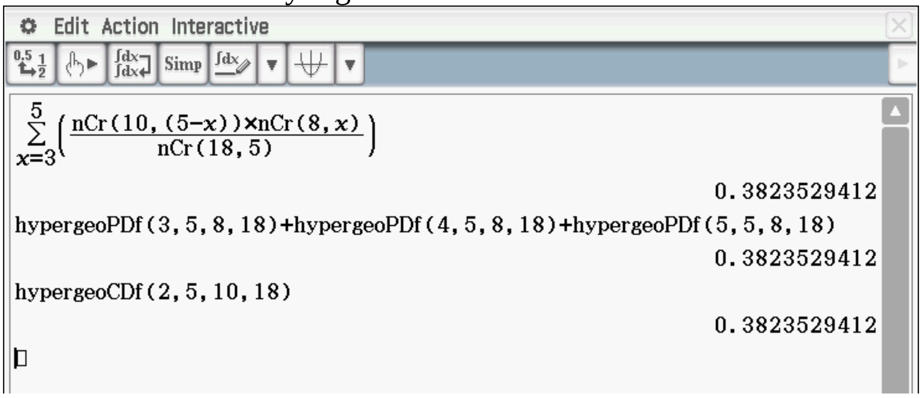


Her med hypergeoPD.





Vi har 10 hvite og 8 røde kuler i en eske og trekker 5 kuler helt tilfeldig.
Hvor stor er sannsynligheten for å trekke minst 3 røde kuler?



Enten ved: $\sum_{x=3}^{5}\frac{10C(5-x)\cdot 8Cx}{18C5}$

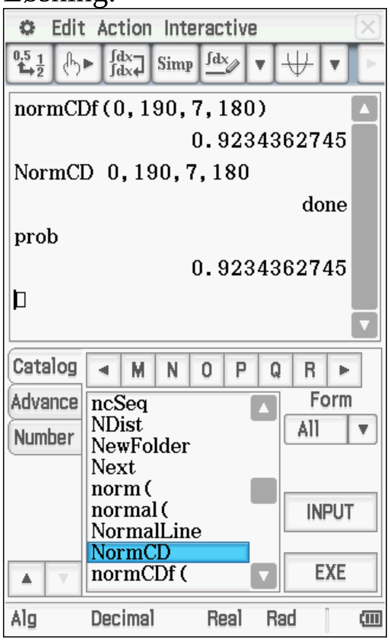
eller: hypergeoPDf(3,5,8,18)+hypergeoPDf(4,5,8,18)+hypergeoPDf(5,5,8,18)

eller enklest ved: hypergeoCDf

6.7 Normalfordeling

Et typisk eksempel på en normalfordeling er høyden til rekrutter. Blant norske rekrutter er forventningsverdien $\mu = 180\,\text{cm}$ og standardavviket $\sigma = 7\,\text{cm}$.
Hvor stor del av norske rekrutter er lavere enn 190 cm?

Løsning.

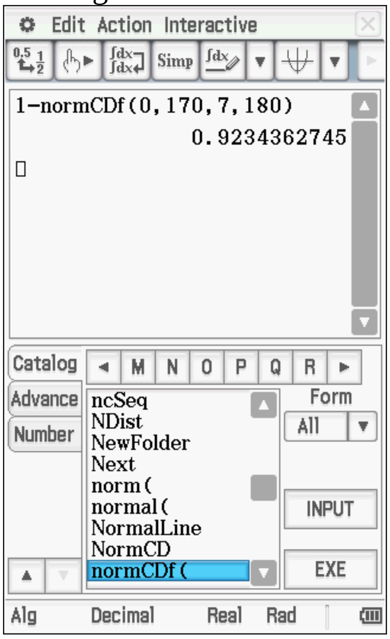


Omtrent 92,3 % av norske rekrutter er lavere enn 190 cm.

Hvor stor del av rekruttene er høyere enn 170 cm?

Når vi ved hjelp av NormCDf har funnet hvor mange rekrutter som er lavere enn 170 cm, kan vi finne hvor stor del av rekruttene som er høyere enn 170 cm ved å regne ut $1-P(X<170)$.

Løsning.

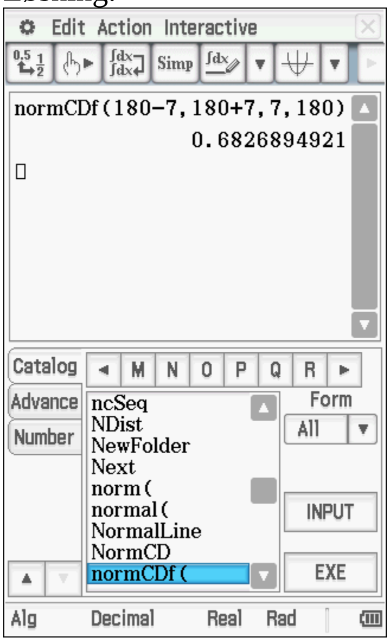


Vi merker oss det er like mange rekrutter som er høyere enn 170 cm enn som er lavere enn 190 cm.

Hvorfor?

Hvor stor del av rekruttene befinner seg innenfor intervallet $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$, altså innenfor ett standardavvik til høyre og venstre for forventningsverdien på 180 cm?

Løsning.

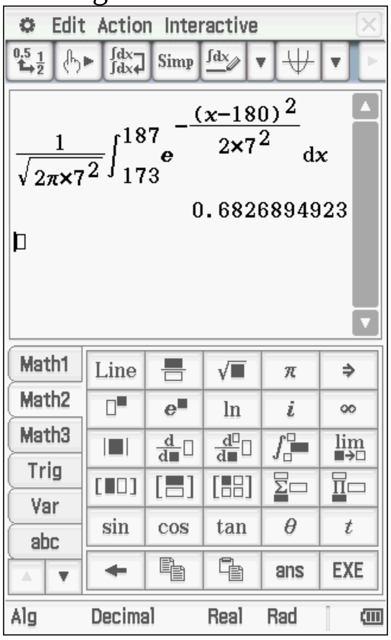


Vi ser at omtrent 68,3 % av rekruttene ligger innenfor ett standardavvik på begge sider av forventningsverdien. Det betyr at 68,3 % av rekruttene har en høyde mellom 173 cm og 187 cm.

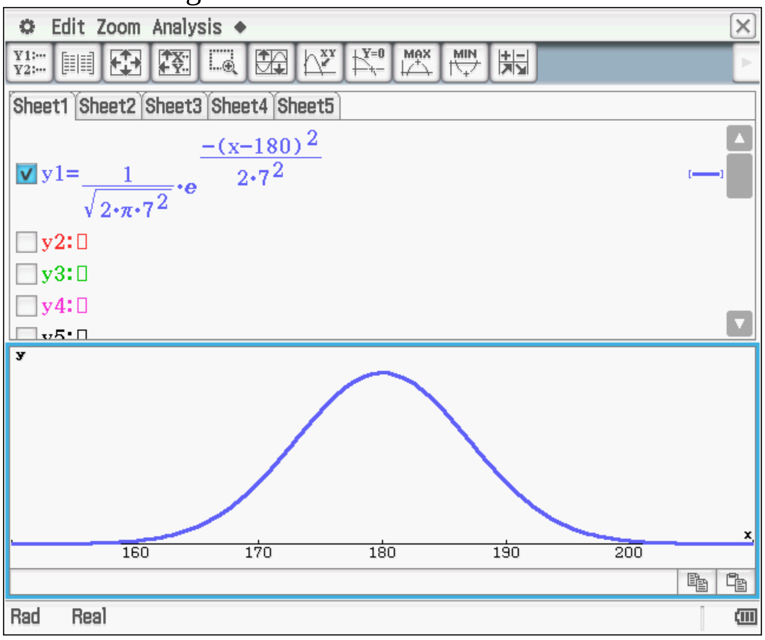
Alternativt:

Vi kan også benytte normalfordelingsfunksjonen *f* gitt ved $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ til å finne sannsynligheter. La oss se hvordan vi finner sannsynligheten for at en tilfeldig valgt rekrutt har en høyde som avviker ett standardavvik fra forventningsverdien.

Løsning.

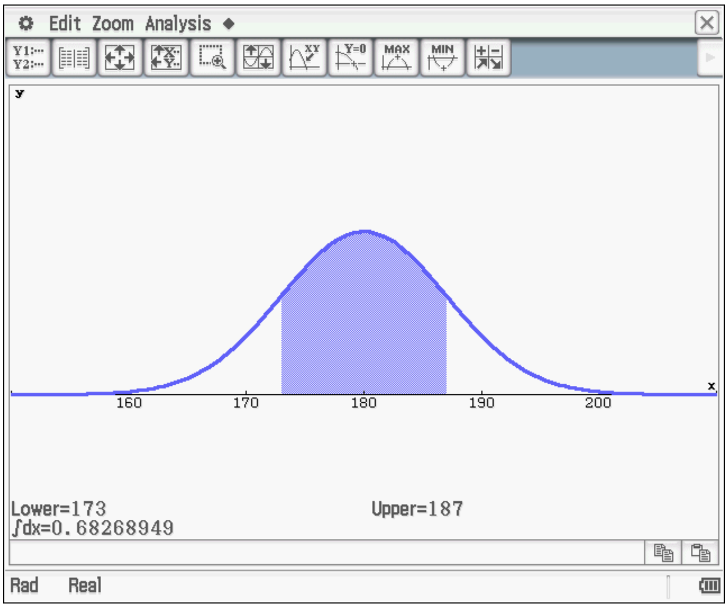


Grafisk løsning



Legg inn normalfordelingsfunksjonen *f* gitt ved $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

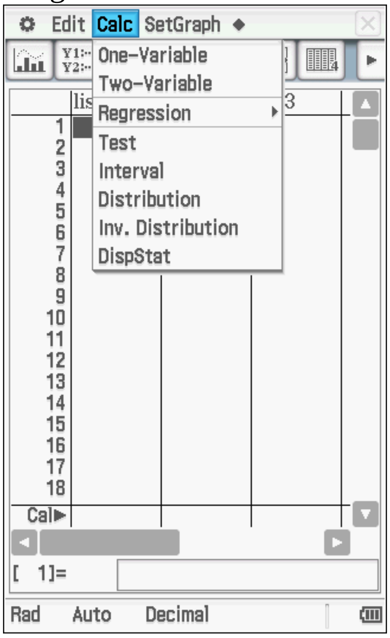
Integrer normalfordelingsfunksjonen fra 173 til 187.



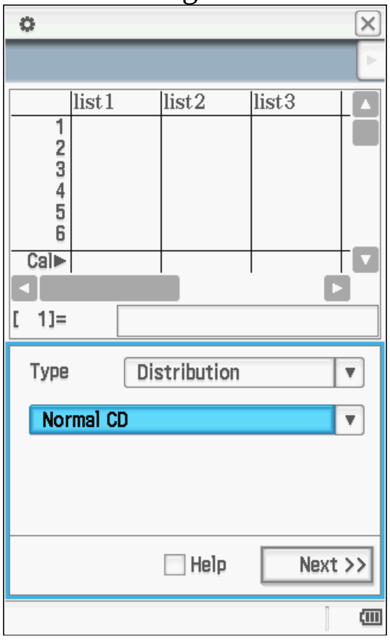
Vi får bekreftet at omtrent 68,3 % av rekruttene ligger innenfor ett standardavvik på begge sider av forventningsverdien.

Alternativt.

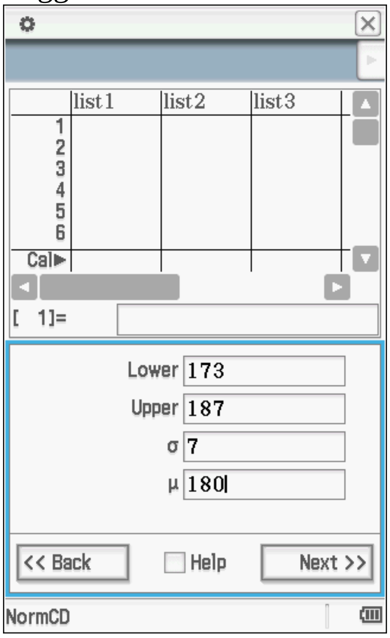
Velg Calc i Statistics.



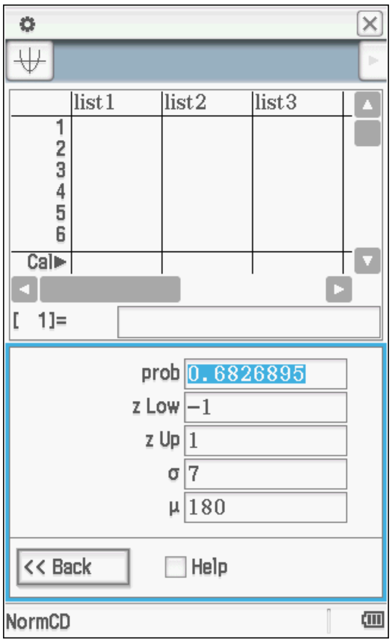
Distribution og Normal CD.



Legg inn verdiene.



Svar.



Vi får bekreftet at omtrent 68,3 % av rekruttene ligger innenfor ett standardavvik på begge sider av forventningsverdien.

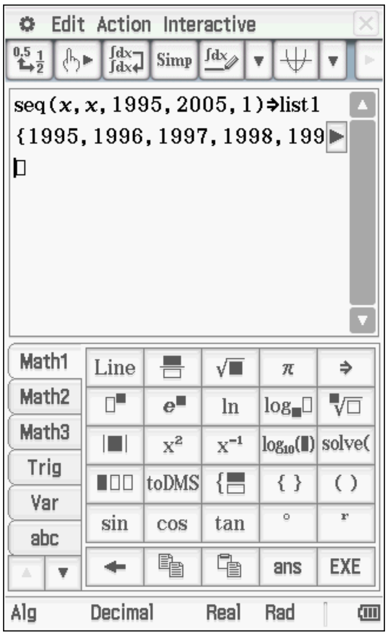
6.8 Kurvediagram

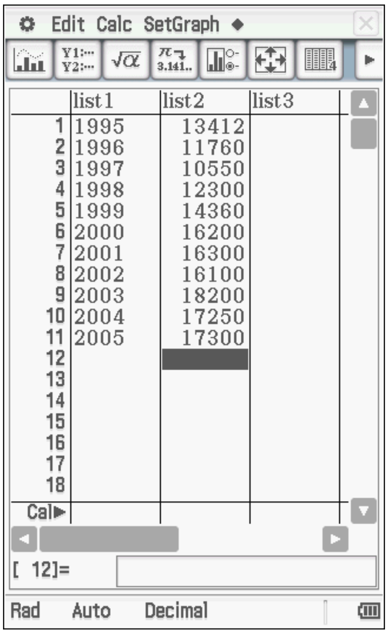
Tabellen nedenfor viser oljeproduksjonen i et OPEC-land i perioden 1990 til 2005. Produksjonen er i 1000 tonn.

Årstall	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Produksjon	13412	11760	10550	12300	14360	16200	16300	16100	18200	17250	17300

 Framstill produksjonsutviklingen i denne perioden som et kurvediagram.

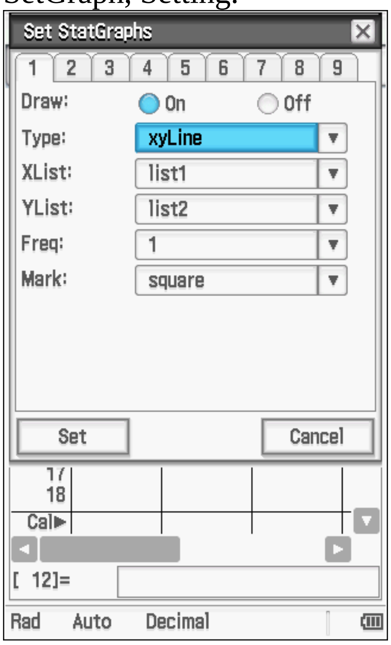
Årstallene fra 1995 til og med 2005 legger vi inn i list1 ved hjelp av seq.

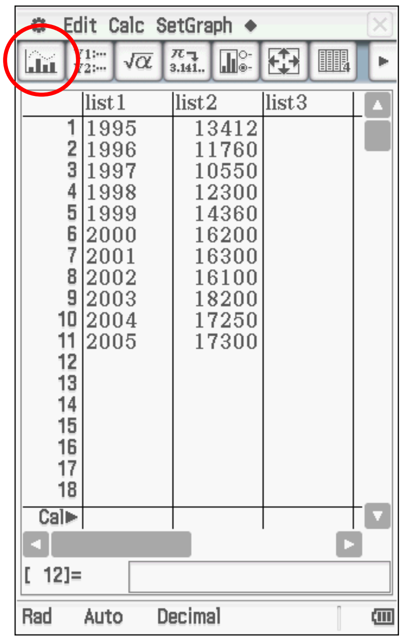


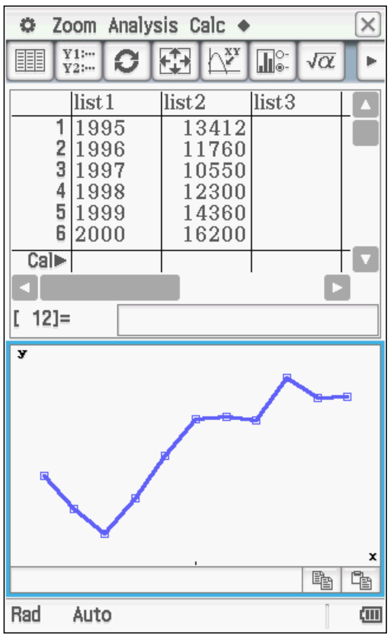


Når vi går inn i Statistics ser vi at årstallene ligger i rekkefølge i list1. Tallene for produksjon må vi legge inn i list2.

SetGraph, Setting.





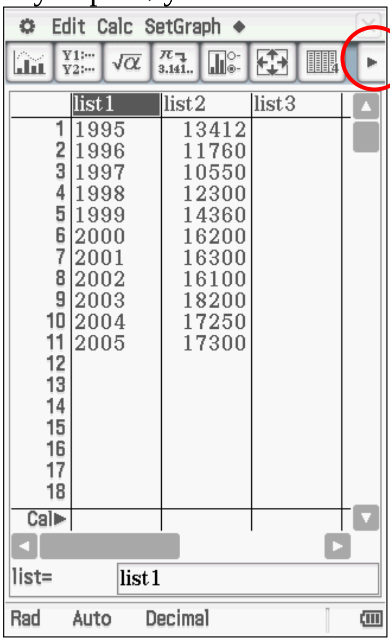


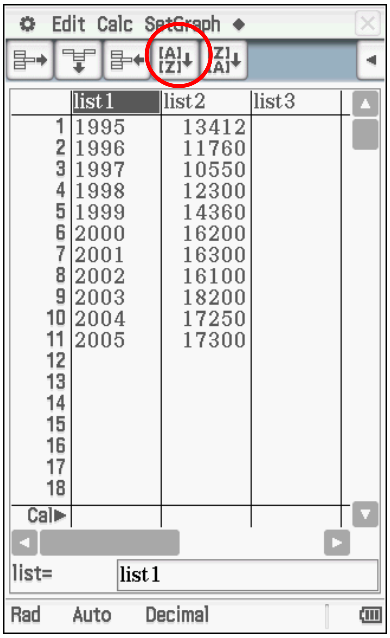
6.9 Sortering av statistisk materiale

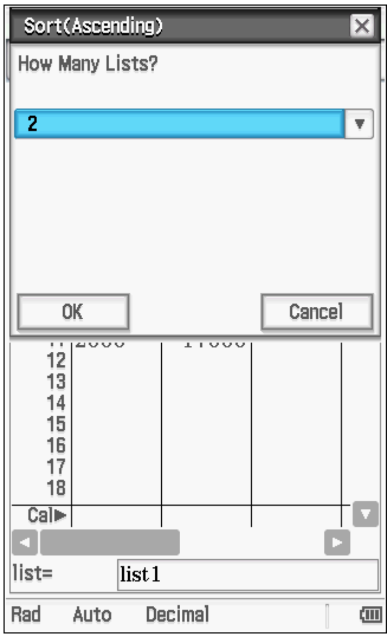
 Hvilket år var oljeproduksjonen minst og hvilket år var produksjonen størst?

I et så begrenset tallmateriale som vi arbeider med her, er det mulig å finne dette uten hjelp av lommeregner. Men vi kan jo tenke oss at tallmaterialet var mye større. Da kan denne framgangsmåten komme til stor nytte.

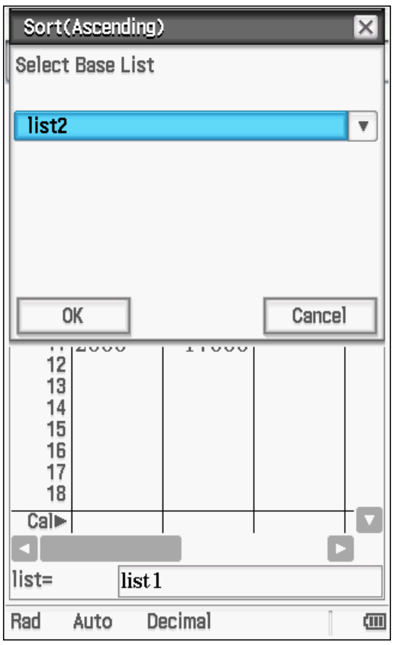
Trykk pil høyre.

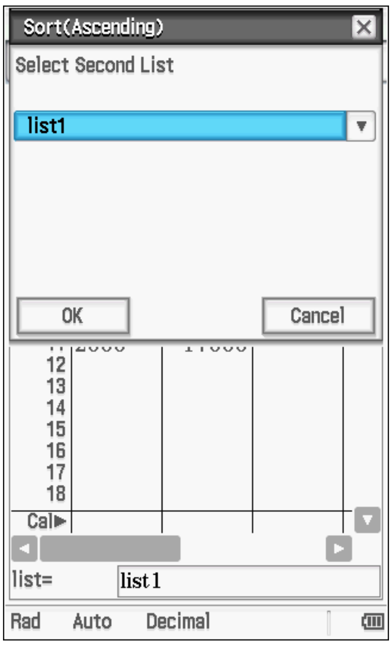


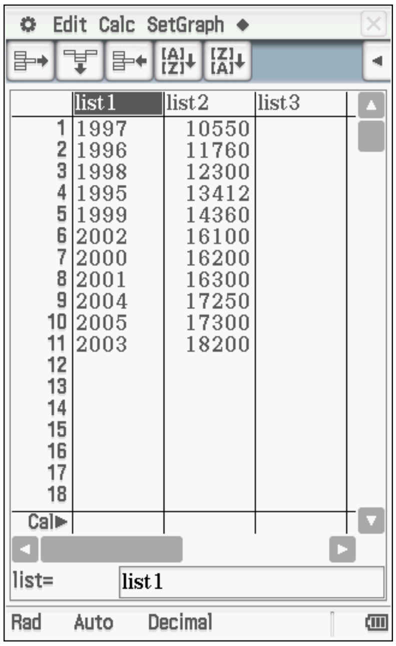




list2 er Base List.







Årstall og produksjon skal ikke skille lag, men holde sammen under sorteringen.
Oljeproduksjonen er minst i 1997 og størst i 2003.

6.10 Gjennomsnitt, median, kvartiler, typetall og variasjonsbredde

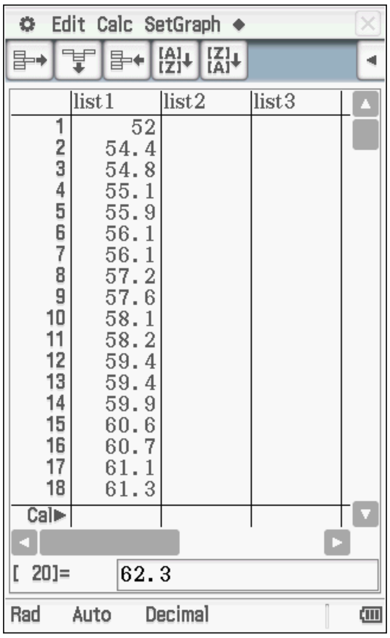
Gjennomsnitt Summen alle verdiene dividert på antall verdier	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ $\bar{x} = \dfrac{h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + ... + h_p x_p}{n}$	Hvor $x_1, x_2 \ldots$ er observerte verdier. Når verdien x_i forekommer h_i ganger i n observasjoner.
Gjennomsnitt i frekvensfordelinger	$\bar{x} = \dfrac{m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + ... + m_k \cdot f_k}{n}$	k intervaller med midtpunkt $m_1, m_2, ... \, m_k$ og tilhørende frekvenser $f_1, f_2, ... \, f_k$
Median	Den midterste verdien når datamaterialet er sortert i stigende orden.	Merk! Hvis antall observasjoner er et partall, er medianen gjennomsnittet av de to midterste verdiene.
Typetall	Verdien i datamaterialet som forekommer flest ganger.	
Variasjonsbredde	variasjonsbredde = høyeste verdi – laveste verdi	
Øvre kvartil	Verdien i et sortert datamateriale som deler observasjonsverdiene slik at 25 % har høyere verdi.	
Nedre kvartil	Verdien i et sortert datamateriale som deler observasjonsverdiene slik at 25 % har lavere verdi.	
Kvartilbredde	kvartilbredde = øvre kvartil – nedre kvartil	Kvartilbredden er ikke påvirket av de 25 % største eller minste verdiene. Kvartilbredden er derfor et godt spredningsmål, selv om verdiene i datamaterialet er skjevt fordelt.
Kvartilavvik	$\text{kvartilavvik} = \dfrac{\text{kvartilbredde}}{2}$	

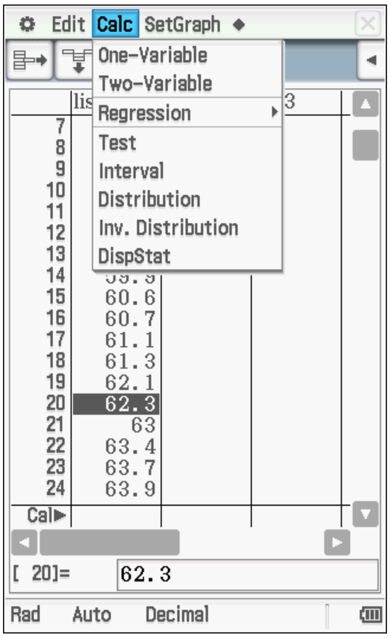
 Det ble gjort flere målinger av trafikkstøyen i en by. Følgende data (i dB) ble registrert

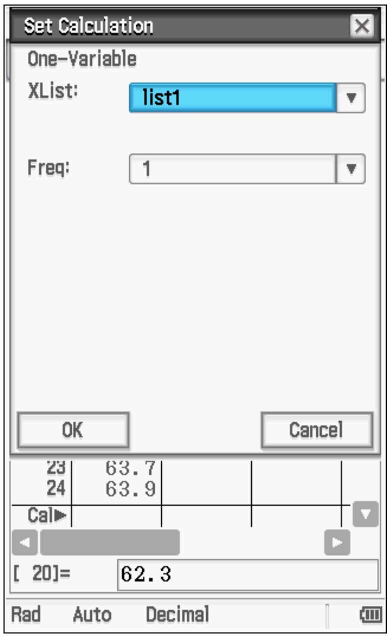
52,0	54,4	54,8	55,1	55,9	56,1	56,1	57,2	57,6	58,1	58,2	59,4
59,4	59,9	60,6	60,7	61,1	61,3	62,1	62,3	63,0	63,4	63,7	63,9
63,9	64,5	64,8	65,1	65,9	66,5	66,7	67,1	68,9	69,1	70,4	72,8

Bestem gjennomsnitt, median, øvre - og nedre kvartil, typetall og variasjonsbredde.

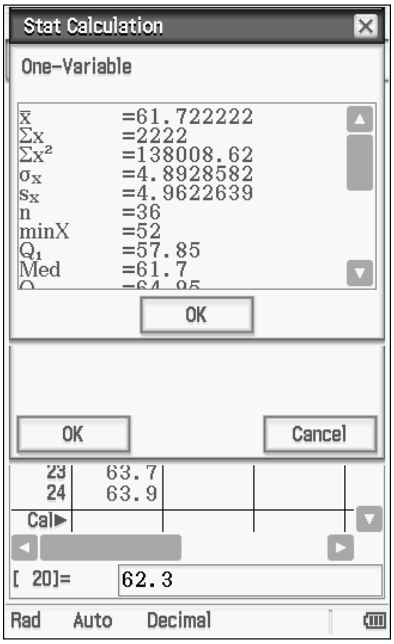
Legg dataene inn i list1. Velg Calc. One-Variable.

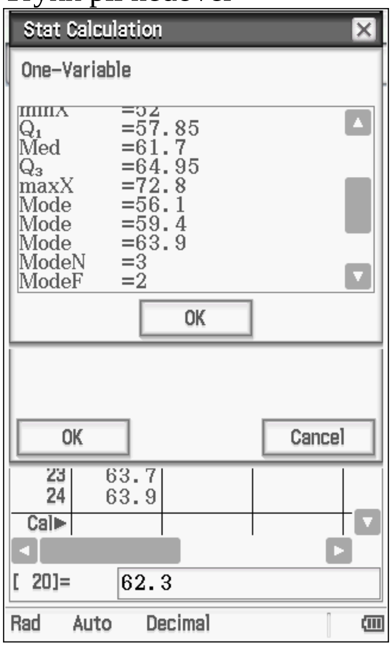






Trykk pil nedover





Her ser vi at gjennomsnittet er 61,72 dB og medianen er 61,7 dB. Nedre kvartil er 57,85 dB og øvre kvartil er 64,95 dB. Typetall er 56,1 dB, 59,4 dB og 63,9 dB. Disse tre resultatene finnes flest ganger i datamaterialet.

Variasjonsbredden er differansen mellom høyeste og laveste verdi i datamaterialet.
$\text{maxX} - \text{minX} = 72{,}8 - 52 = 20{,}8$ dvs. 20,8 dB

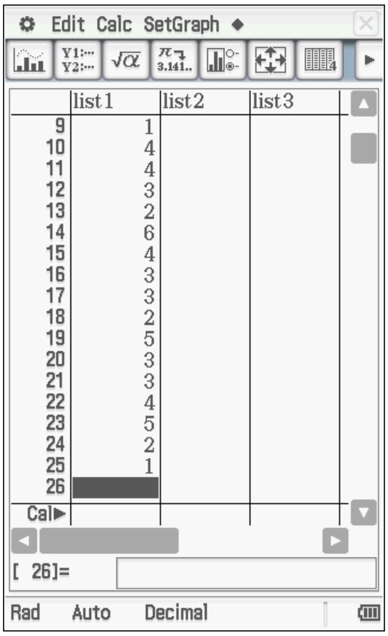
 På en matematikkprøve fikk elevene i en klasse følgende karakterer:

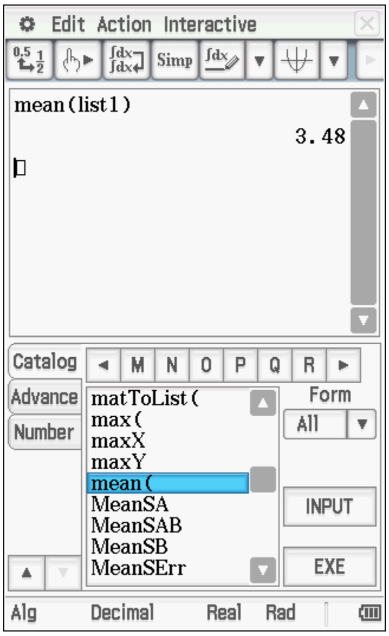
4 3 4 5 2 6 2 6 1 4 4 3 2 6 4 3 3 2 5 3 3 4 5 2 1

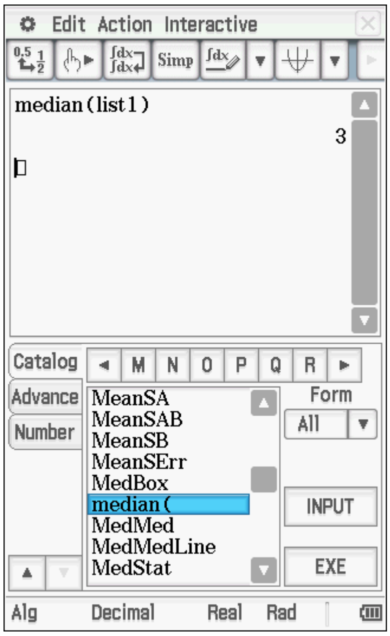
Finn gjennomsnitt, median og variasjonsbredde.

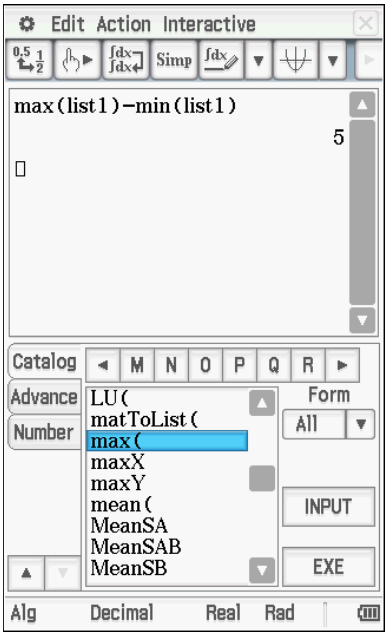
Legg karakterene inn i list1 i Statistics.

I denne oppgaven finner vi gjennomsnitt, median og variasjonsbredde i Main.









Denne differansen gir variasjonsbredden.

6.11 Varians og standardavvik

Varians	$s^2 = \dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}$ $\overline{x}$ er gjennomsnittsverdien	Et mål for spredningen sett i forhold til gjennomsnittet.
Standardavvik	$s = \sqrt{\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$	Kvadratrota av variansen.

Standardavvik er et mål på hvor stor variasjon det er i det statistiske tallmaterialet vi behandler. Variabelen vi måler, kan vi kalle *X*, Da kaller vi ofte standardavviket for σ_x, SD(x) eller s_x. Vi antar at vi har et sett målinger av verdien *X*. Disse kan vi kalle x_1, x_2,..., x_n. For å regne ut standardavviket må vi først regne ut gjennomsnittet $\overline{x}$ eller $\hat{\mu}_x$.

Formelen for å regne ut standardavviket er: $SD(x) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$

Standardavviket er kvadratroten av variansen gitt ved $VAR(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$

I vår formel for standardavvik har vi valgt å dividere med *n*. Noen ganger dividerer vi kvadratsummen med *n* - 1. Når vi dividerer kvadratsummen med *n*, finner vi standardavviket til en populasjon. Det såkalte utvalgsstandardavviket finner vi ved å dividere med $n-1$. Hvis utvalget er stort, altså stor *n*, spiller det ikke så stor rolle om vi dividerer med *n* eller $n-1$.

Lommeregneren skiller mellom populasjonsstandardavvik og utvalgsstandardavvik. Standardavvik for en populasjon skrives $x\sigma_n$, mens standardavvik for et utvalg skrives $x\sigma_{n-1}$.

Først skal vi foreta en del håndregning.

 Honningproduksjon

En honningprodusent har 53 bikuber. For å gjøre tabellen mer praktisk har birøkteren delt materialet inn i klasser. Vi skal altså behandle såkalt klassedelt materiale. Tabellen nedenfor viser blant annet honningproduksjonen i kilogram per bikube i løpet av en sesong.

Det er ikke mulig å finne den nøyaktige gjennomsnittsmassen ut fra tallene i tabellen, men vi kan finne en tilnærmet riktig gjennomsnittsverdi ved hjelp av klassemidtpunktene. Klassemidtpunktet er gjennomsnittet av nedre og øvre verdi i intervallet. Vi antar at alle bikubene i en klasse, har akkurat dette midtpunktet som masse.

Vi får følgende tabell:

Masse [kg]	Frekvens f	Klassemidtpunkt x_m	Klassesum $f \cdot x_m$	Kvadratisk avvik $f \cdot (x_m - \overline{x})^2$
[10,20>	15	15	225	6615
[20,30>	7	25	175	847

[30,40>	10	35	350	10
[40,50>	8	45	360	648
[50,60>	7	55	385	2527
[60,70>	4	65	260	3364
[70,100>	2	85	170	4802
Sum	53		1925	18813

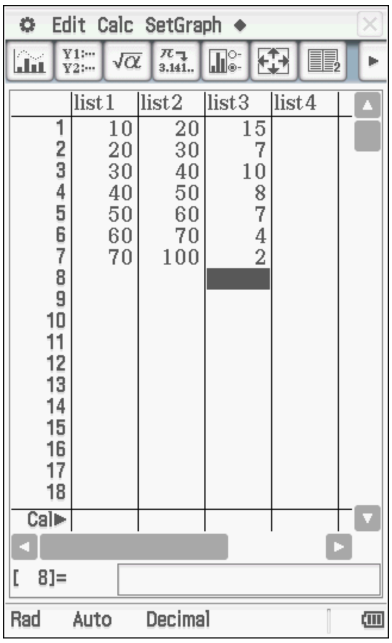
Før vi kan fylle inn verdien i siste kolonne må vi ha regnet ut gjennomsnittet. Vi finner gjennomsnittet ved $\bar{x} = \frac{f \cdot x_m}{n} = \frac{1925}{53} \approx 36$, det vi si tilnærmet 36 kg.

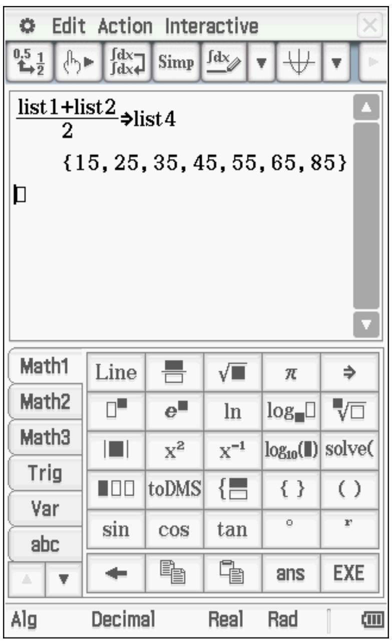
Standardavviket: $x\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{18813}{53}} = 18{,}84$, det vil si 18,84 kg.

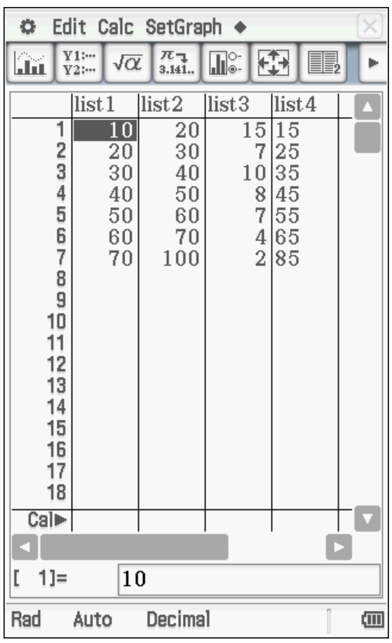
Hvordan kan vi bruke lommeregneren som et nyttig verktøy i denne problemstillingen?
Vi ønsker selvfølgelig å kunne mate lommeregneren med masseklassene og frekvensen – for deretter å la lommeregneren ta seg av det tidkrevende regnearbeidet.

Men hvordan skal lommeregneren finne klassemidtpunktene?

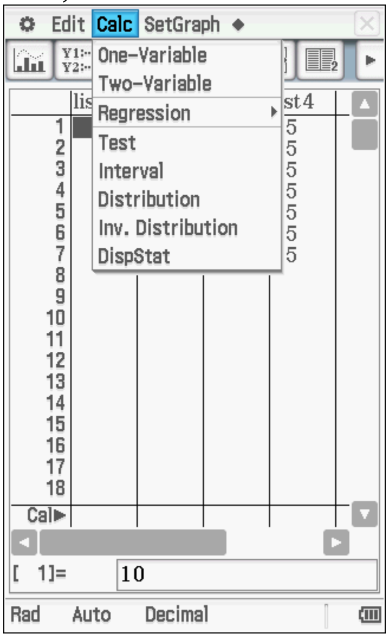
Vi legger nedre grense for klassene inn i list1 og øvre grense inn i list2. Frekvensene legger vi i list3. Så legger vi formelen $\frac{\text{list1+list2}}{2}$ inn i list4. Det betyr at list4 vil komme til å inneholde klassemidtpunktene.

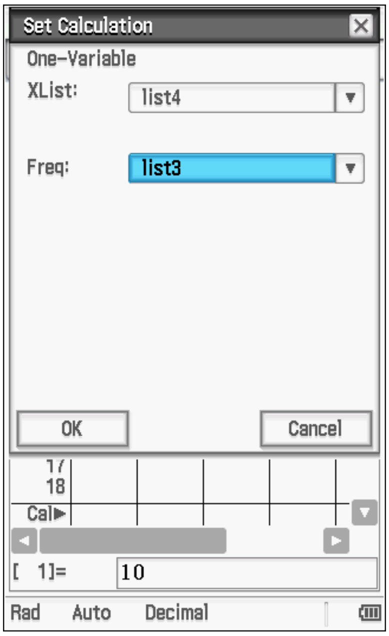


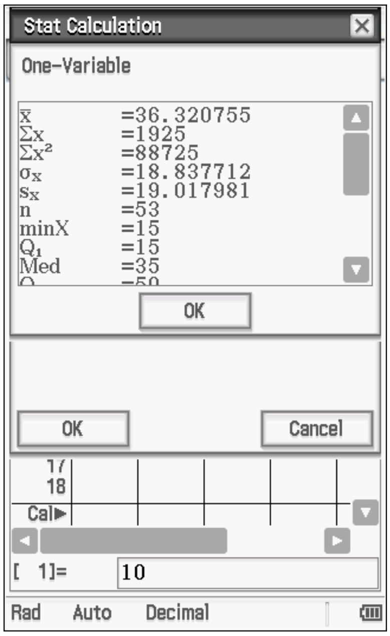




Calc, One-Variable. Resultat.







Lommeregneren bekrefter at gjennomsnittet $\overline{x} = 36,32$ og at standardavviket $x\sigma_n = 18,84$.

6.12 Forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel X

Forventningsverdien: $\mu = E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$

Variansen: $VAR(X) = \sum (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$

Standardavviket: $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$

I en binomisk fordeling er $E(X) = np$ og $VAR(X) = np(1-p)$

Regneregler for forventning og varians:

$$E(a + bX) = a + b \cdot E(X)$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$VAR(a + bX) = b^2 \cdot VAR(X)$$

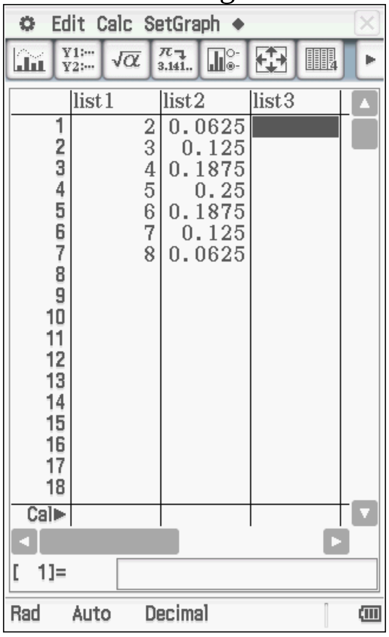
Dersom X og Y er uavhengige, gjelder: $VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y)$

Tabellen viser sannsynlighetsfordelingen til *X*.

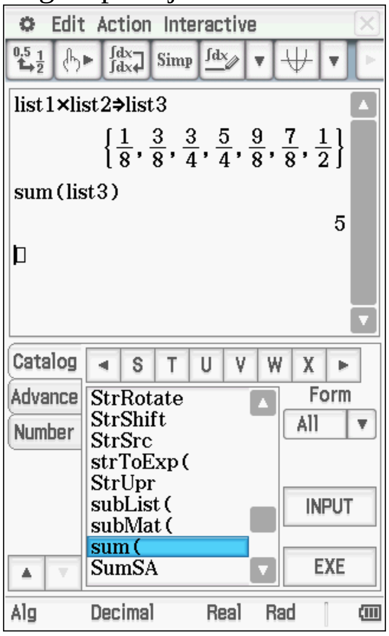
x	2	3	4	5	6	7	8
P(*X*=*x*)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Regn ut $E(X)$ og $VAR(X)$.

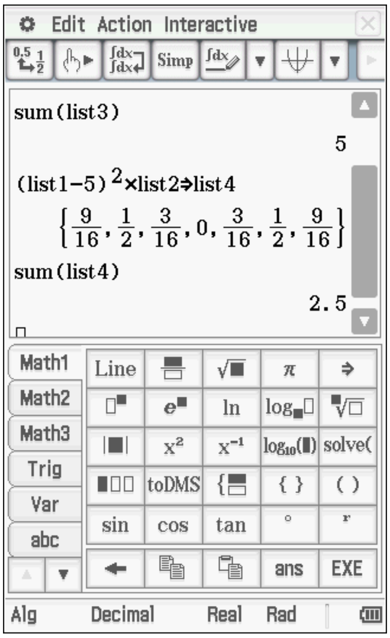
Tabellen i list1 og list2.



Regneoperasjoner med lister.



Produktet av list1 og list2 er lagt inn i list 3. Vi ser at sum(list3) gir forventningsverdien $E(X)$.



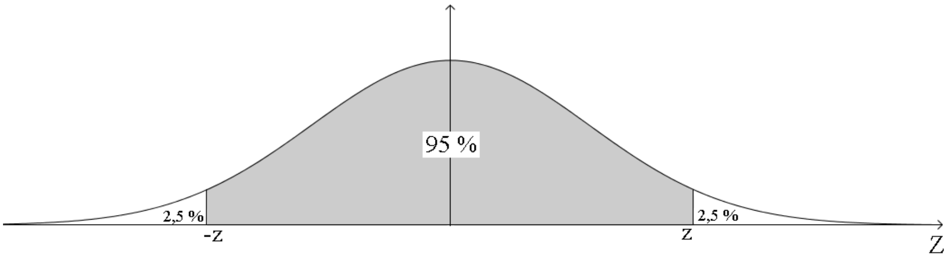
Variansen $VAR(X) = 2{,}5$.

Vi sparer oss for mye regnearbeid ved å regne med lister på denne måten.

6.13 Konfidensintervall

Konfidens

Konfidens på k % mellom $-z$ og z: $P(-z < Z < z) = k$ %



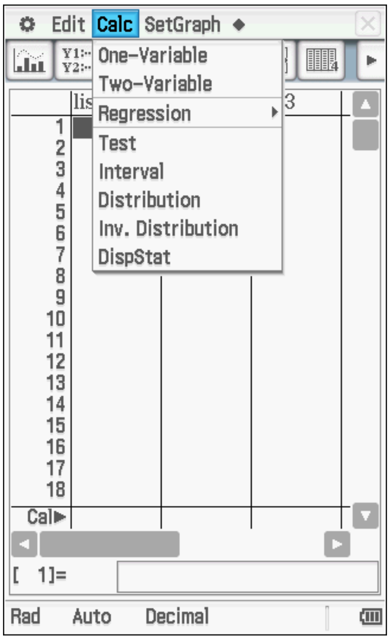
I et 95 % konfidensintervall er $z = 1{,}96$. Finnes ved å slå opp $P(Z < z) = 0{,}975$ i normalfordelingstabellen.

Konfidensintervall	Et p % - konfidensintervall for forventningsverdien μ $\left[\bar{X} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	Det er p % sannsynlighet for at forventningsverdien μ er innenfor dette intervallet
Konfidensintervall for andelen p	$\left[\hat{p} - z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$ Gjelder når $n\hat{p} \geq 5$ og $n(1-\hat{p}) \geq 5$	p er estimert med $\hat{p} = \frac{X}{n}$

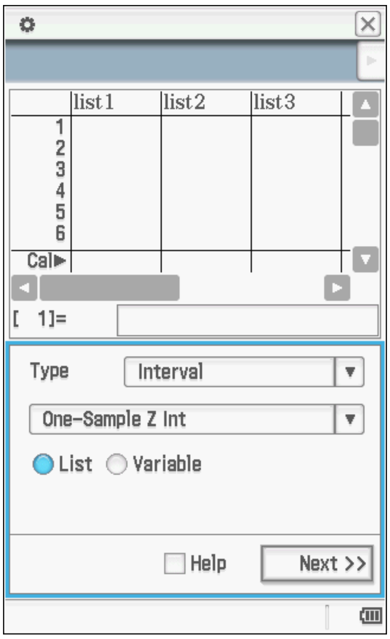
Et måleresultat er normalfordelt med forventningsverdi 24 og standardavvik 6. Bestem et 80 % konfidensintervall for verdien når vi foretar en enkelt måling.

Velg Statistics i hovedmenyen.

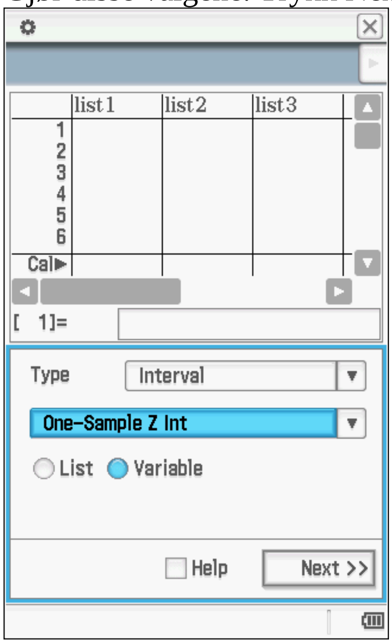
Calc.



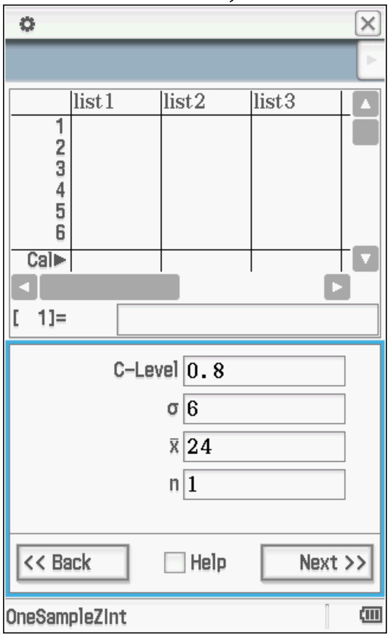
Interval.



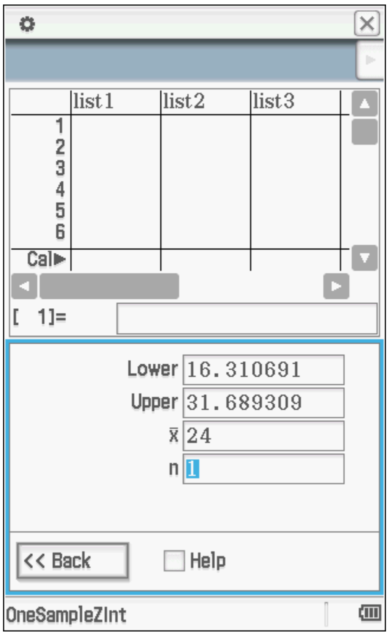
Gjør disse valgene. Trykk Next.



Legg inn verdiene.
Merk at 80 % = 0,8.



Resultat.



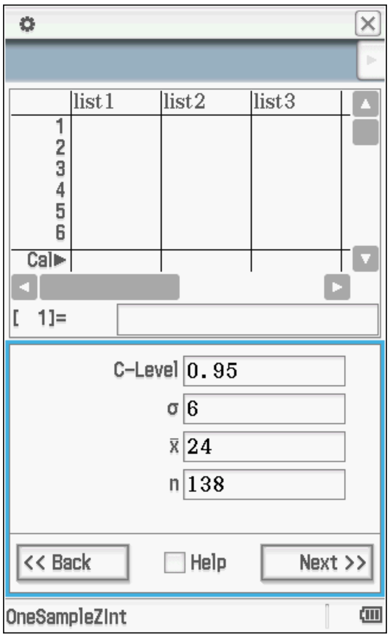
Konfidensintervallet ligger mellom 16,3 og 31,7.

Hva skjer med øvre og nedre grenseverdi for intervallet nå vi øker C-level til 95 %? Sjekk selv.

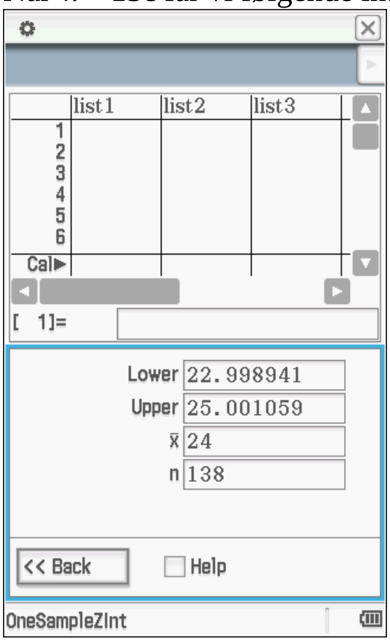
Undersøk også hva som skjer med konfidensintervallet når *n* øker.


Hvor mange målinger må vi foreta for at intervallet $[23,25]$ skal være et 95 % konfidensintervall for gjennomsnittet i stikkprøven?

Vi kan prøve oss fram med ulike verdier for *n*.



Når $n = 138$ får vi følgende intervall.



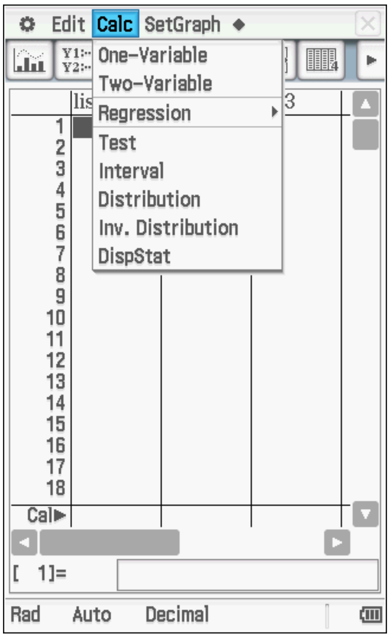
Altså veldig nært $[23,25]$.

6.14 Hypotesetesting

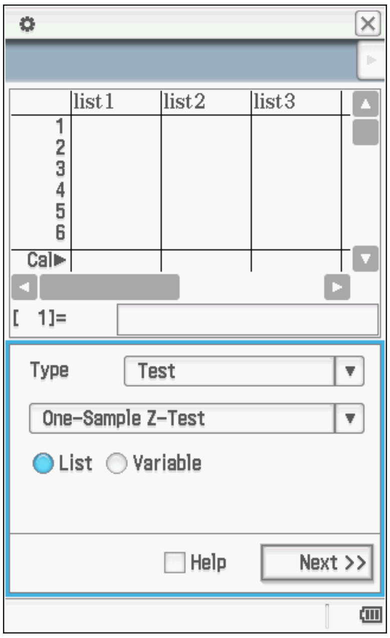
Hypotesetest Undersøker om sannsynligheten p i en binomisk fordeling eller om forventningsverdien μ i en normalfordeling har en bestemt verdi.		
	Binomisk:	**Normalfordeling:**
Venstresidig test	Nullhypotese H_0: $p = p_0$ Mothypotese H: $p < p_0$ Regn ut fra H_0 P-verdi: $P(X \leq x)$	Nullhypotese H_0: $\mu = \mu_0$ Mothypotese H: $\mu < \mu_0$ Regn ut fra H_0 P-verdi: $P(\bar{X} \leq \bar{x})$
Høyresidig test	Nullhypotese H_0: $p = p_0$ Mothypotese H: $p > p_0$ Regn ut fra H_0 P-verdi: $P(X \geq x)$	Nullhypotese H_0: $\mu = \mu_0$ Mothypotese H: $\mu > \mu_0$ Regn ut fra H_0 P-verdi: $P(\bar{X} \geq \bar{x})$
Tosidig test	Nullhypotese H_0: $p = p_0$ Mothypotese H: $p \neq p_0$ Regn ut fra H_0 P-verdi: $2 \cdot P(X \leq x)$ eller $2 \cdot P(X \geq x)$	Nullhypotese H_0: $\mu = \mu_0$ Mothypotese H: $\mu \neq \mu_0$ Regn ut fra H_0 P-verdi: $2 \cdot P(\bar{X} \leq \bar{x})$ eller $2 \cdot P(\bar{X} \geq \bar{x})$

Mengden av et bestemt stoff i en pille skal være 260 mg med standardavvik 40 mg.
I en stikkprøve med 15 piller viser det seg at de inneholder 242 mg i gjennomsnitt.
Er dette for lite når vi setter signifikansnivået til 10 %?

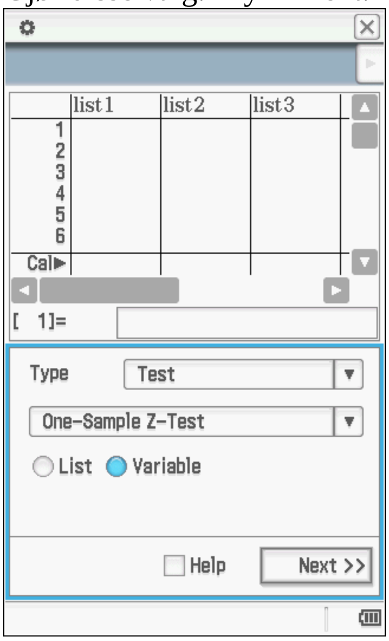
Velg Statistics i hovedmenyen.
Calc.



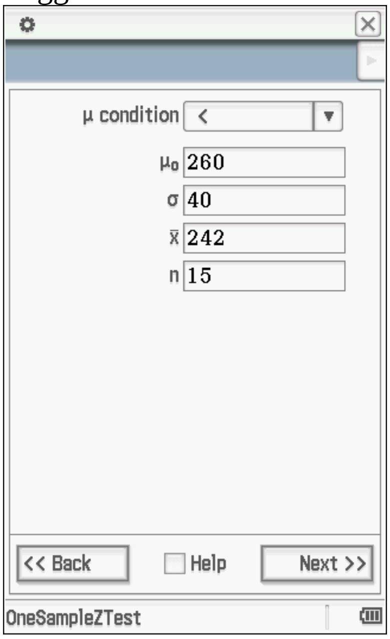
Test.



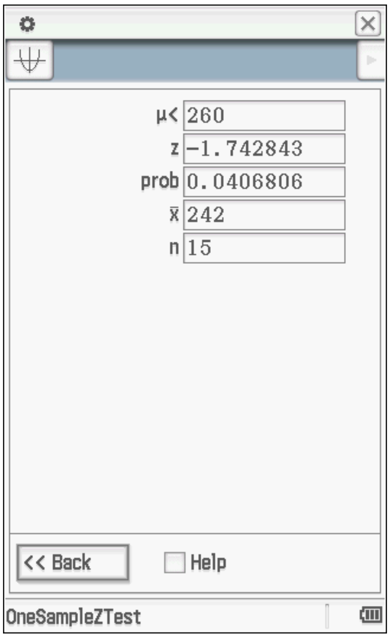
Gjør disse valg. Trykk Next.



Legg inn data. Next.



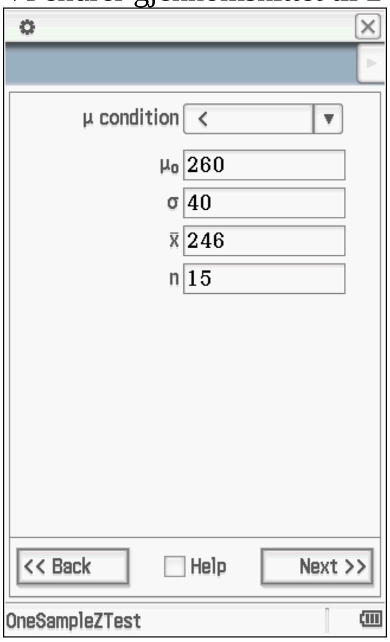
Resultat.



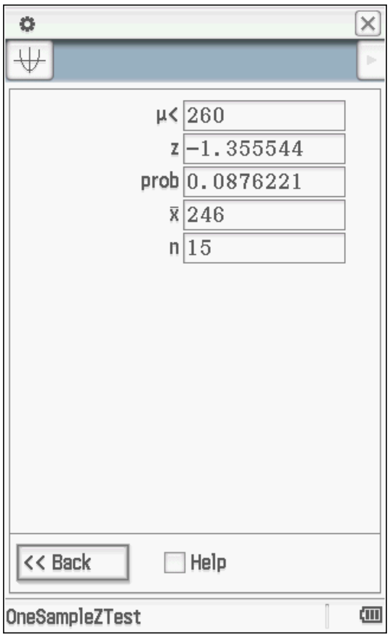
Nullhypotesen: Forventningsverdien er som påstått lik $\mu_0 = 260$ mg.
Alternativ hypotese: Forventningsverdien $\mu < 260$ mg .
I øverste linje har vi altså valgt $\mu < \mu_0$.

Vi har observert et gjennomsnitt som er 1,7428 standardavvik under forventningsverdien i følge nullhypotesen. Det er bare 4 % sannsynlighet for å finne en så lav verdi som 242 mg i en stikkprøve på 15 piller, dersom nullhypotesen er riktig. Med et signifikansnivå på 10 % må vi forkaste hypotesen.

Vi endrer gjennomsnittet til 246 mg.

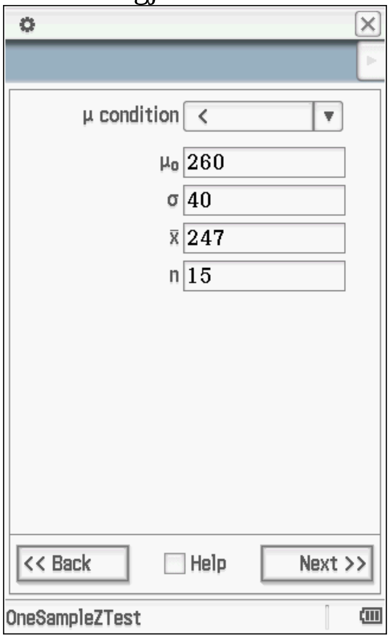


Resultat.

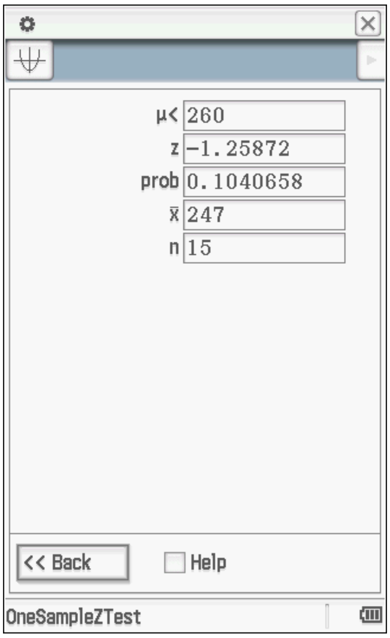


Siden $p = 0{,}0876$ må vi fortsatt forkaste hypotesen.

Vi endrer gjennomsnittet til 247 mg.



Resultat.



Siden vi nå får at $p = 0{,}1041$ må vi akseptere hypotesen.

7. Tallfølger og rekker

7.1 Tallfølger og rekker. Rekursjon

En tallfølge er en serie av tall etter hverandre: $a_1,\ a_2,\ a_3,........a_n,.....$
Ledd nr. n i tallfølgen kan vi kalle a_n. Som regel har vi en formel for a_n uttrykt ved n.
I rekursive tallfølger er det en sammenheng mellom a_n og a_{n-1}.
Når vi summerer leddene i en tallfølge, får vi en rekke. Summen av de n første leddene kaller vi s_n der $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

7.2 Aritmetiske tallfølger og rekker

I en aritmetisk tallfølge er differansen mellom ett ledd og det foregående konstant.
$a_n - a_{n-1} = \mathrm{d}$, dvs. $a_n = a_{n-1} + \mathrm{d}$

Størrelsen d kaller vi differansen i tallfølgen. Uttrykt ved hjelp av første ledd og differansen er det *n*-te leddet gitt ved:
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot \mathrm{d}$.

Når vi summerer leddene i en aritmetisk tallfølge, får vi en aritmetisk rekke. Summen s_n av de n første leddene i en aritmetisk rekke er gitt ved:

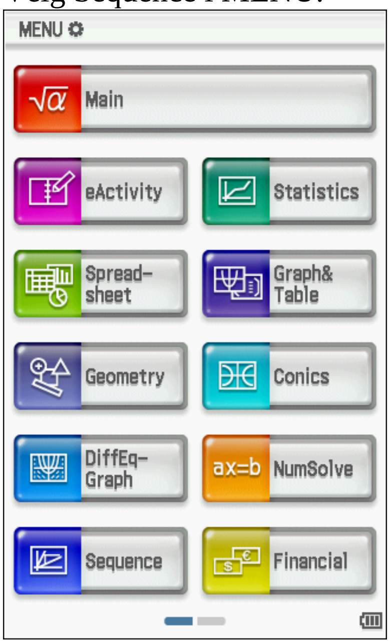
$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

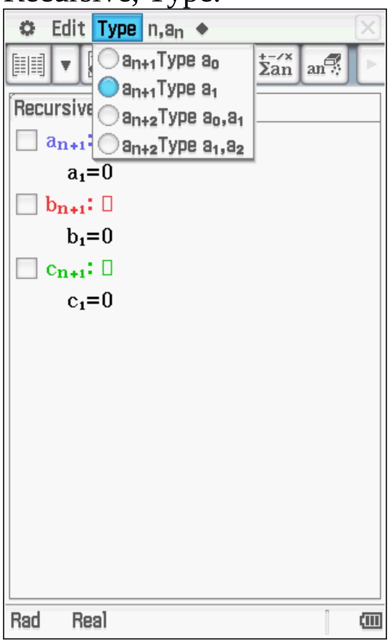

I en aritmetisk rekke er det første leddet lik 7 og differansen er lik 3.

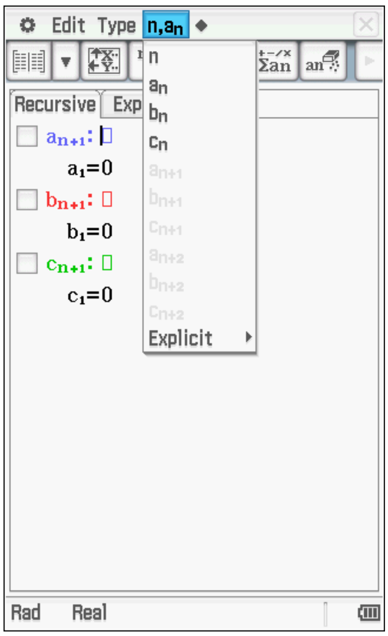
a) Bestem a_5.

b) Regn ut s_{10}.

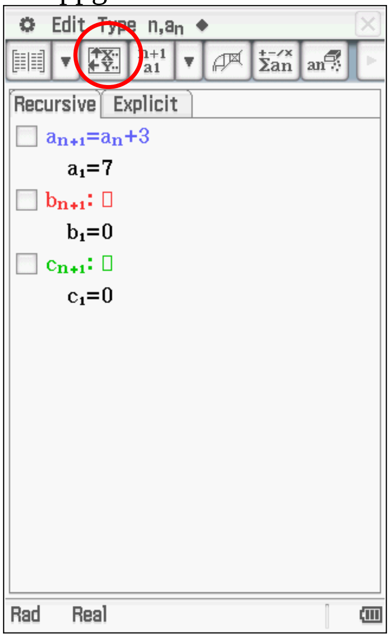
a)
Velg Sequence i MENU. Recursive, Type.

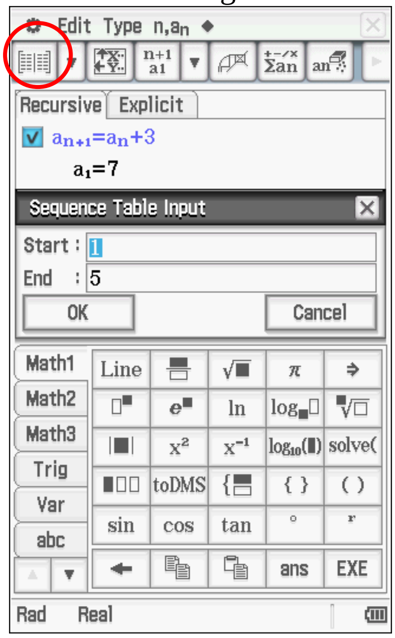


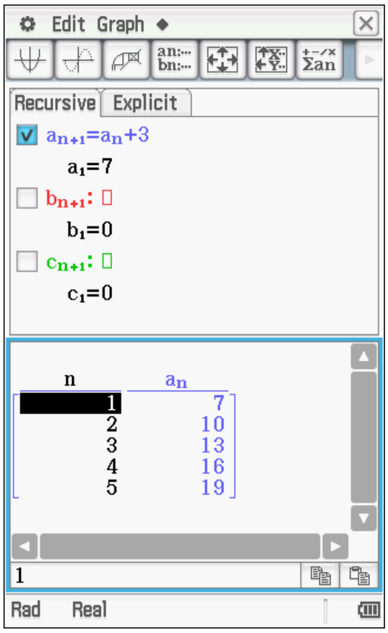




Se oppgaven. Skriv inn Start og End.



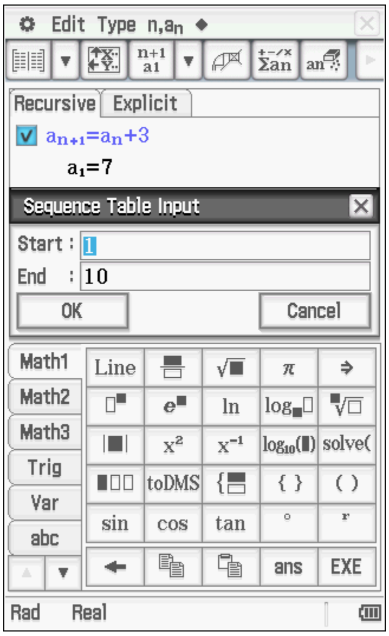


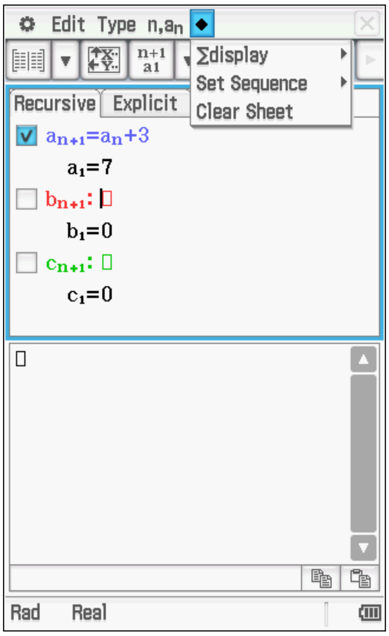


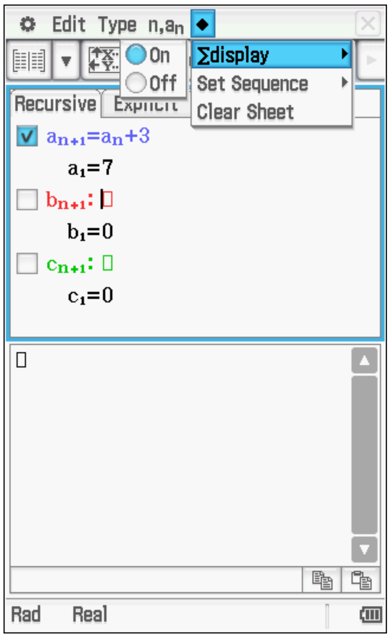
Svar: $a_5 = 19$

b)

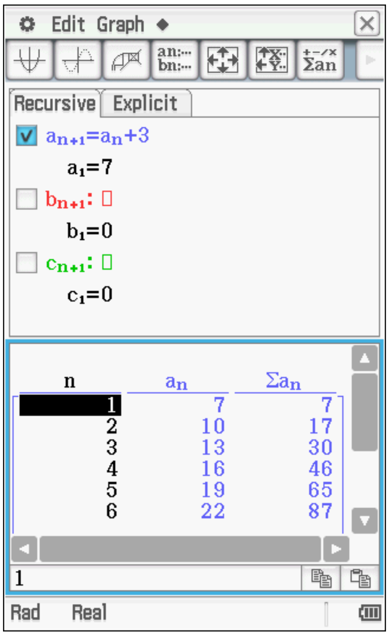
Utvid Table Input. Sett $\sum$Display til On.

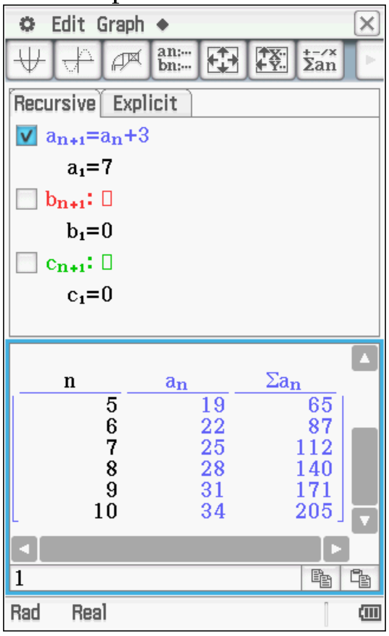






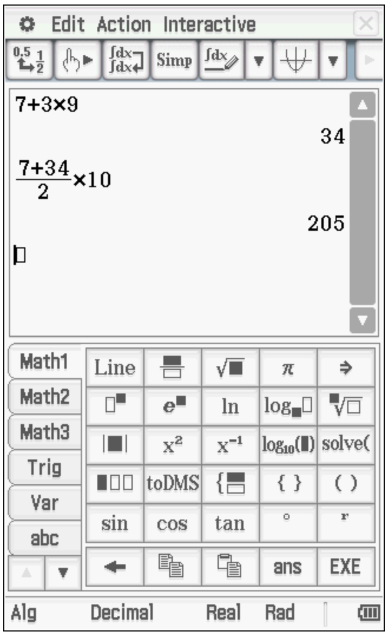
Gå med pil nedover til $n = 10$.



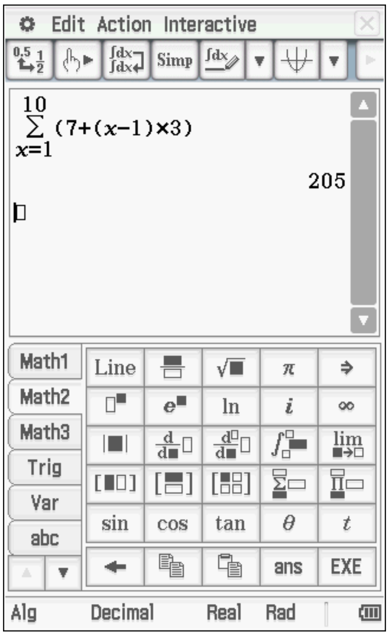


Svar: $s_{10} = 205$

Kontroll 1 i Main.



Kontroll 2 i Main.



7.3 Geometriske tallfølger og rekker

I en geometrisk tallfølge er forholdet mellom ett ledd og det foregående konstant.

$$\frac{a_n}{a_n - 1}\text{, dvs. } a_n = a_{n-1} \cdot k$$

Forholdet k kaller vi kvotienten i tallfølgen. Uttrykt ved hjelp av første ledd og kvotienten er det n-te leddet gitt ved:

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}.$$

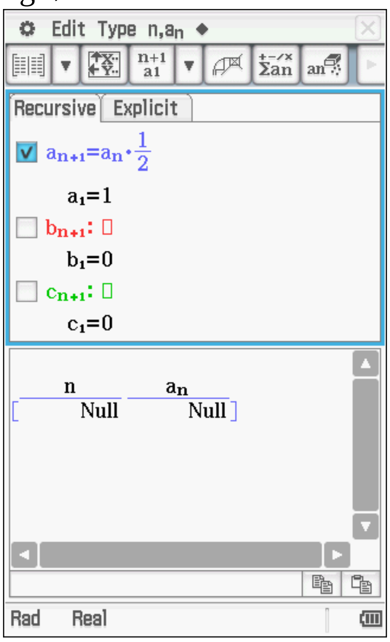
Når vi summerer leddene i en geometrisk tallfølge, får vi en geometrisk rekke. Summen s_n av de n første leddene i en geometrisk rekke er:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

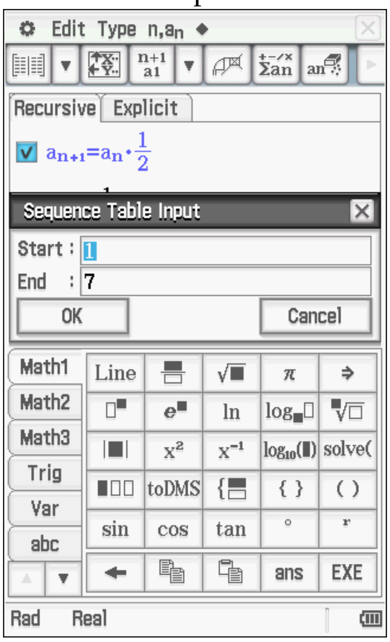
Vi har gitt den geometriske rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$.

Regn ut summen.

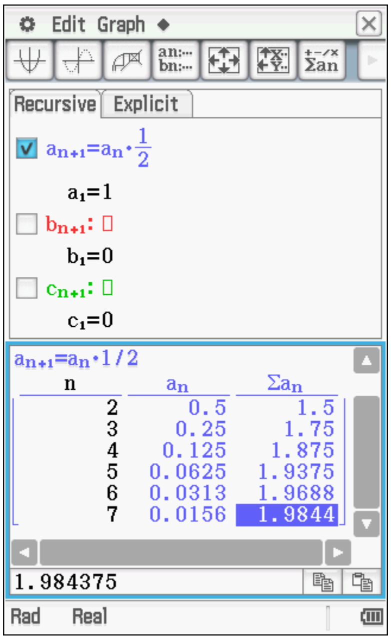
Legg inn rekursjonsformelen og første ledd.



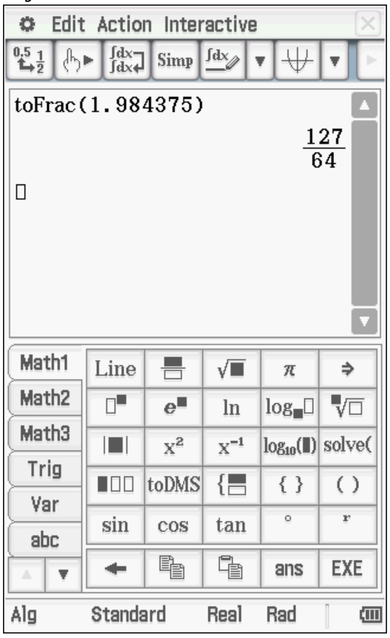
Juster Table Input.

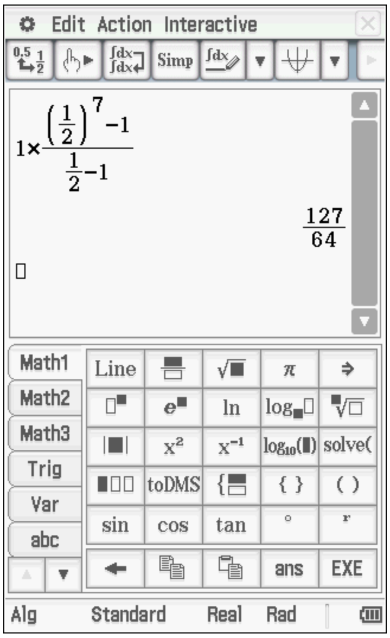


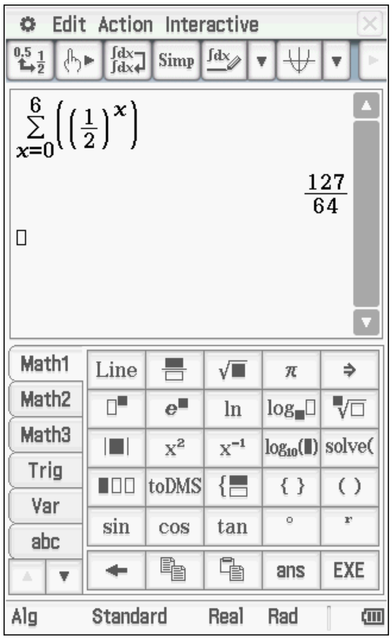
Pil nedover til summen.



Gjør om svaret til brøk. Kontroll 1 i Main. Kontroll 2 i Main.







Svar: Summen er $\dfrac{127}{64}$.

7.4 Konvergente geometriske rekker

En uendelig geometrisk rekke $(a_1 \neq 0)$ $a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + ...$
er konvergent dersom $-1 < k < 1$.

Summen av den uendelige rekken er da: $s = \dfrac{a_1}{1-k}$

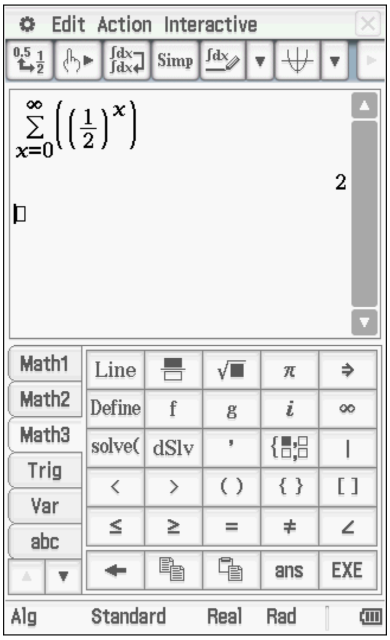
Dersom den uendelige rekken ikke er konvergent, er den divergent. Summen av en divergent rekke eksisterer ikke.


Vi har gitt den uendelige geometriske rekken $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}+....$

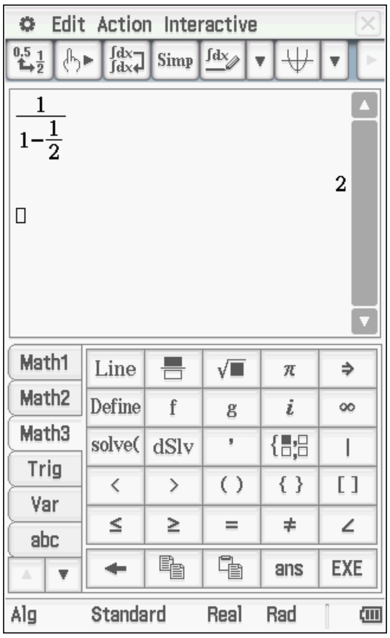
Regn ut summen.

Utregningen nedenfor viser at den uendelige summen konvergerer mot 2.

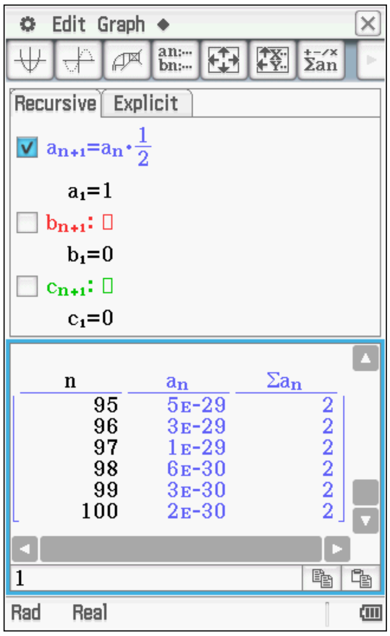
Med bruk av uendeligtegnet.



Kontroll. Merk at $k = \frac{1}{2}$.



Recursion med mange ledd.



Summen konvergerer mot 2.

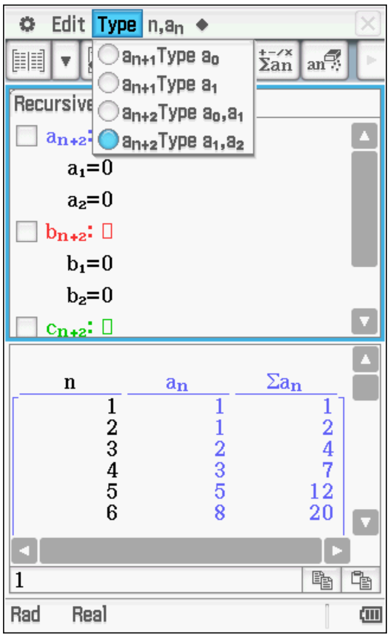
7.5 Vilkårlige tallfølger og rekker

I tallfølgen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … er et ledd i følgen dannet av summen av de to foregående leddene. Denne tallfølgen kaller vi Fibonaccifølgen.

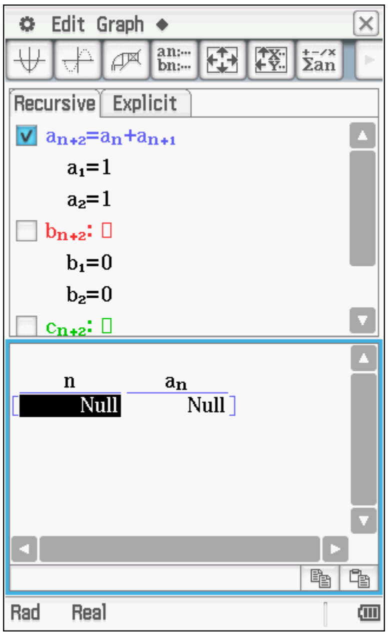
Startverdiene er $a_1 = 1$ og $a_2 = 1$.

Bruk lommeregneren til å beregne a_{20} i Fibonaccifølgen.

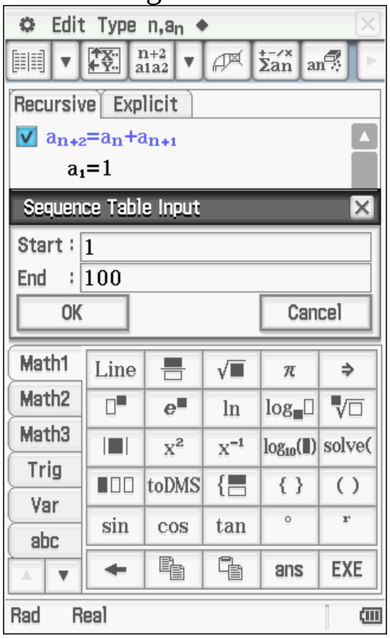
Velg Type.



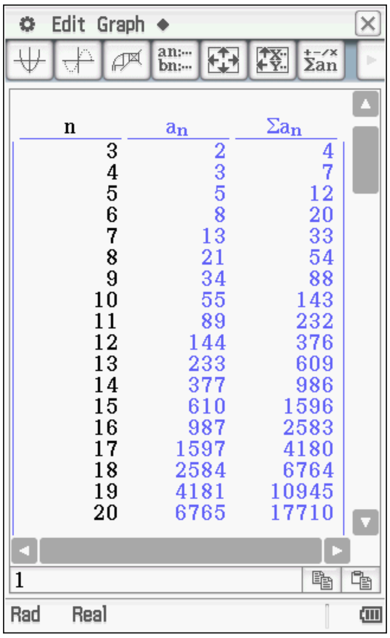
Skriv inn at $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $a_1 = 1$ og $a_2 = 1$.



Sett Start og End.



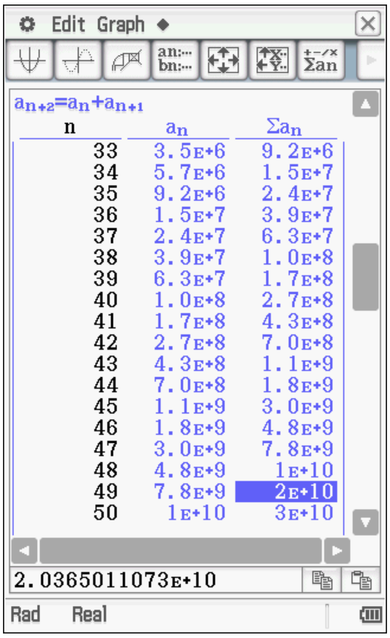
Tabell.



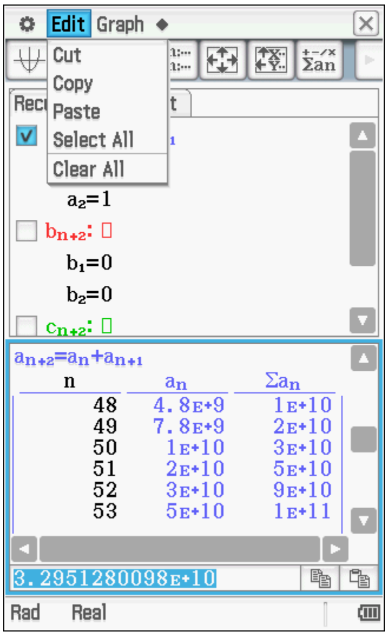
I Fibonaccifølgen er altså $a_{20} = 6765$.

 Bruk lommeregneren til å regne ut forholdet mellom s_{50} og s_{49} i Fibonaccirekken.

Vi har satt Sett $\sum$Display til On.

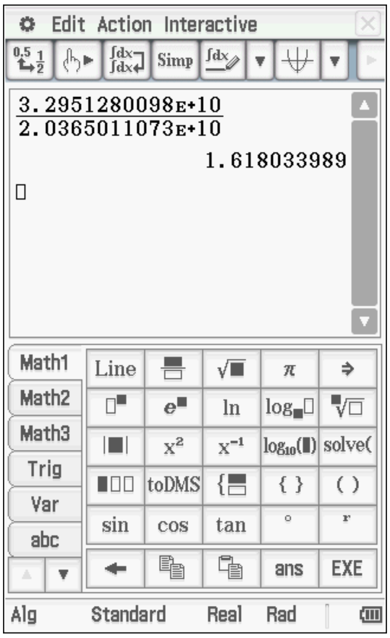


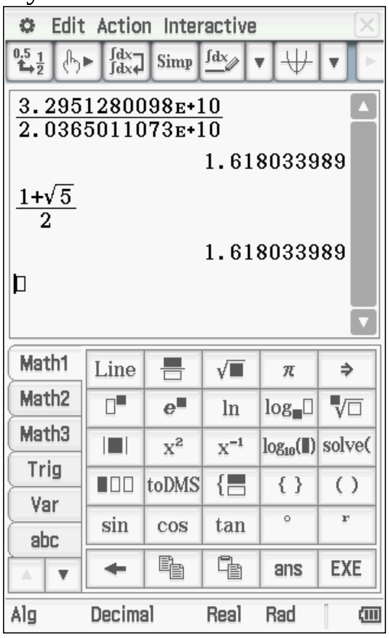
Kopier s_{50} og s_{49} over til Main.



Vi går til Main og regner ut $\frac{s_{50}}{s_{49}}$.

Gylne snitt?





Vi ser at forholdet nærmer seg det gylne snitt.

7.6 Fibonaccifølgen i regneark

Lommeregneren er utstyrt med et avansert regneark. I dette avsnittet ser vi på noen av de viktigste funksjonene.

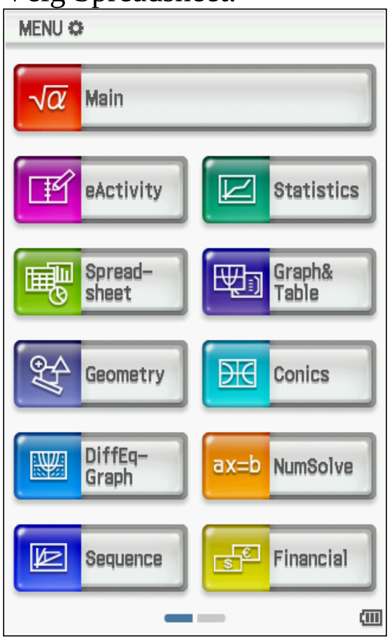
a) Legg inn de 50 første Fibonaccitallene i regnearket på lommeregneren.

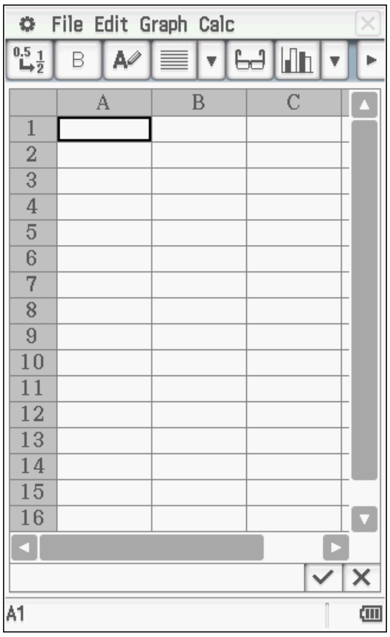
b) Regn ut s_{50} for Fibonaccirekken. Bruk regnearket på lommeregneren.

c) Regn ut forholdet mellom et Fibonaccitall og det foregående.

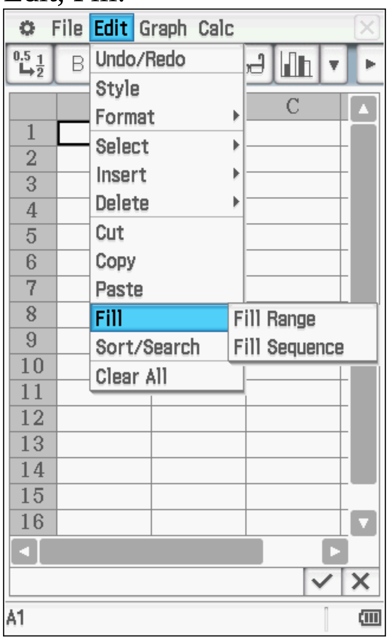
a)

Velg Spreadsheet.

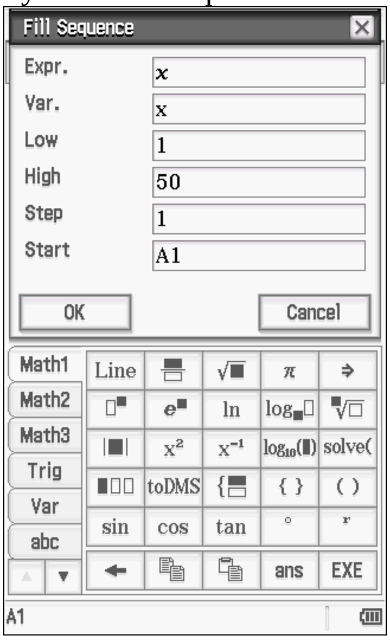




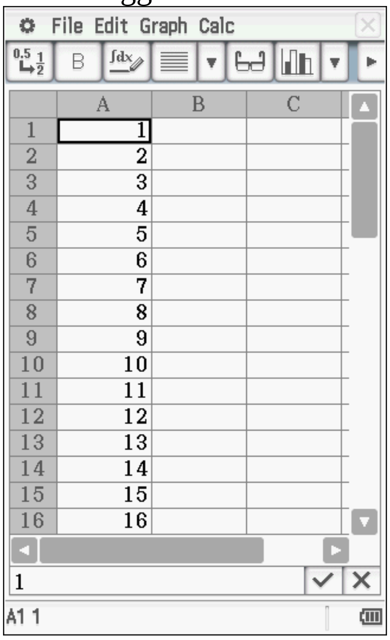
Edit, Fill.

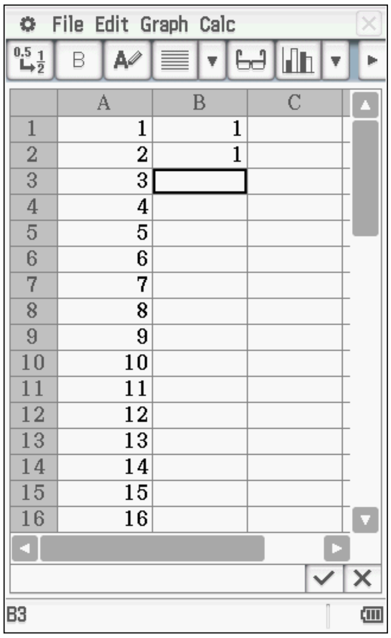


Fyll inn Fill Sequence.



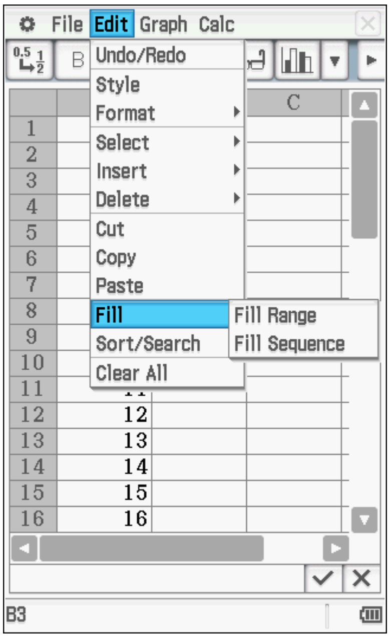
1 til 50 ligger nå i kolonne A



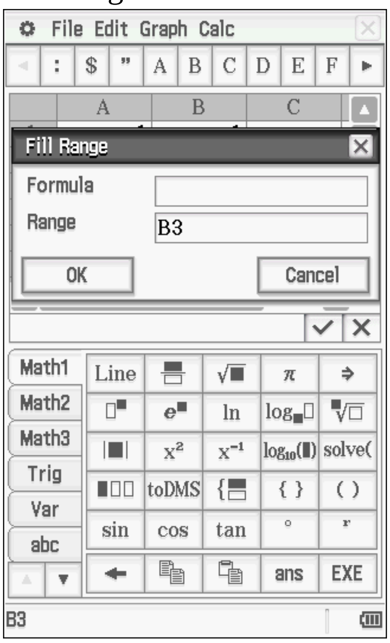


I kolonne B skriver vi de første Fibonaccitallene.

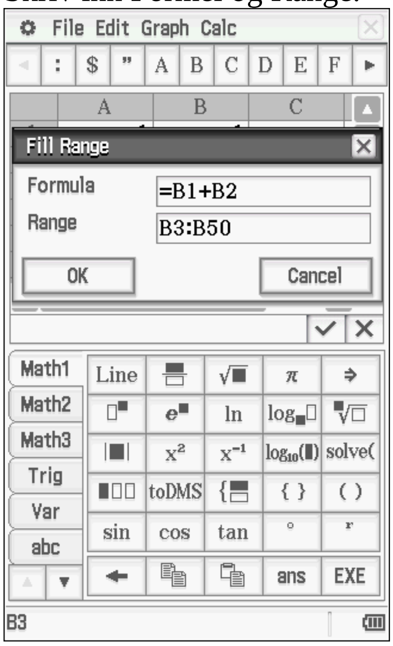
Edit, Fill.



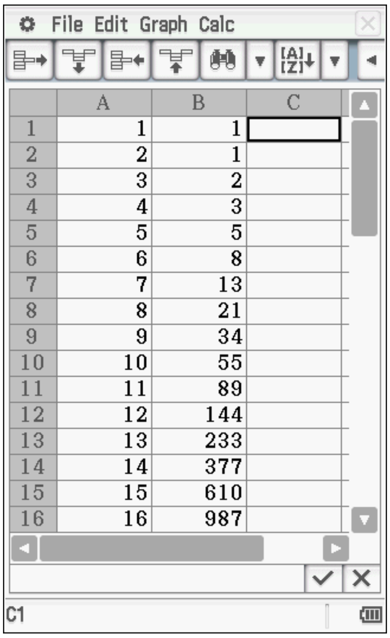
Fill Range.



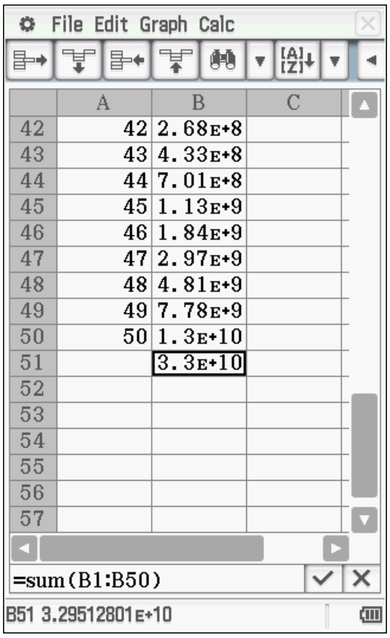
Skriv inn Formel og Range.



Resultat.

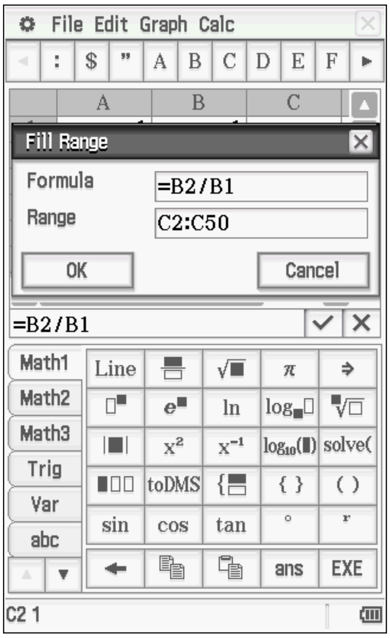


b) Summen av de 50 første Fibonaccitallene i celle B51.

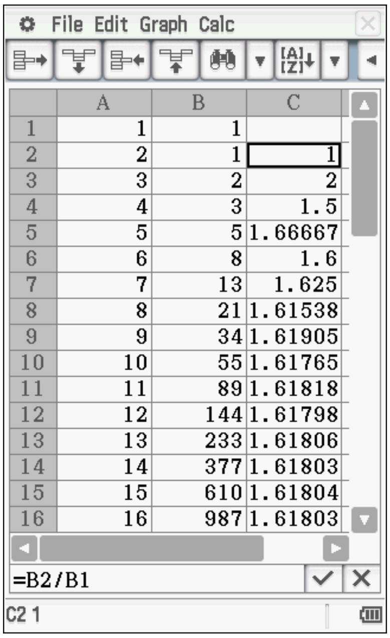


c)

I kolonne C skriver vi ut forholdet mellom et Fibonaccitall og det foregående.



Resultat.



Forholdet mellom et Fibonaccitall og det foregående nærmer seg det gylne snitt.

8. Tall

8.1 Store tall. Sum og fakultet

La oss starte med den velkjente historien om oppfinnelsen av sjakkspillet. Herskeren av India ble meget begeistret over oppfinnelsen av sjakkspillet som ble gjort av en av de vise menn i herskerens palass. Herskeren proklamerte at vismannen selv kunne velge belønning for oppfinnelsen. Oppfinneren av sjakkspillet var en dyktig matematiker. Han foreslo for sin herre at han gjerne ville ha ett riskorn i den første ruten på sjakkbrettet, det dobbelte antall riskorn i neste rute og så videre med dobling av antall riskorn for hver rute utover på brettet i de neste 62 rutene på sjakkbrettet.

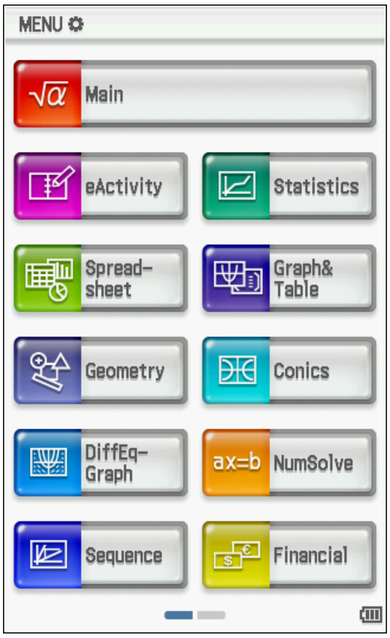
Herskeren syntes dette var en beskjeden belønning. Han beordret sine tjenere til å skaffe riskornene og oppfylle vismannens ønske. Men herskeren ble svært forbauset over hvor fort sjakkbrettet ble dekket av riskorn og hvor fort det gikk før hele palasset var fylt. Antall riskorn i siste rute på sjakkbrettet kan vi skrive som ”2 opphøyd i 63” eller som 2^{63}

Hvor mange riskorn blir det til sammen?

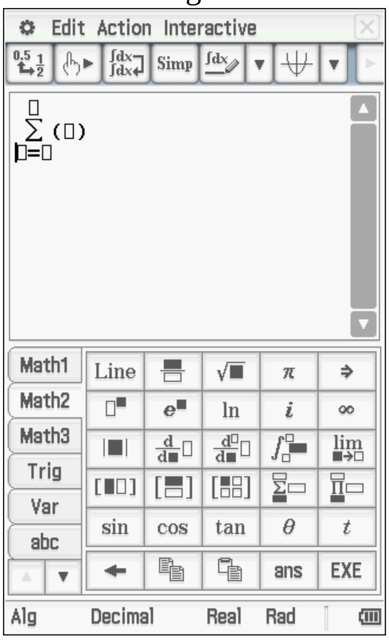
Vi summerer antall riskorn i alle de 64 rutene på sjakkbrettet. Da får vi

$$1+2+2^2+2^3+...+2^{63}=\sum_{n=0}^{63}2^n$$

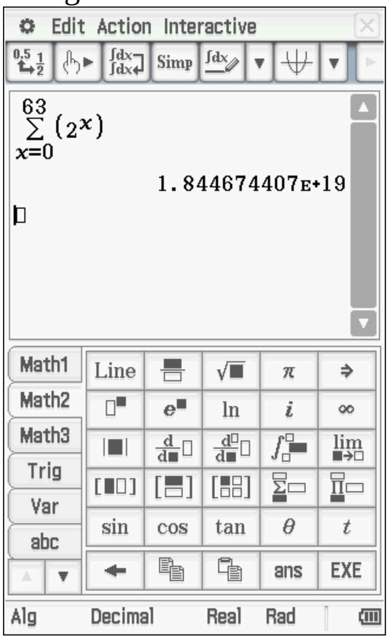
Gå inn i Main.



Finn summetegnet i Math2.

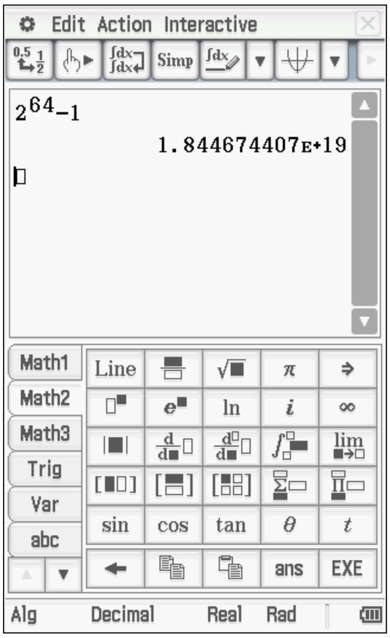


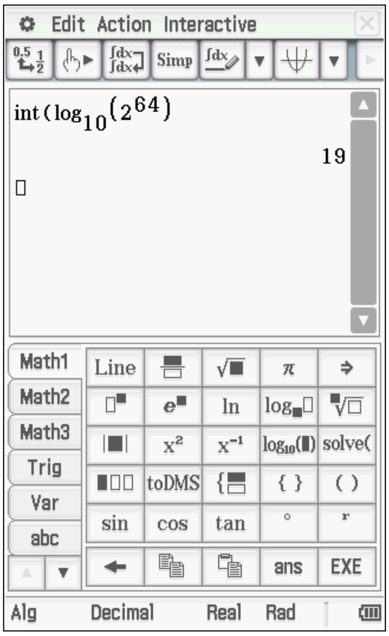
Beregn summen.



Svaret har 20 siffer.

Merk at vi får samme svar ved.





Hvorfor?

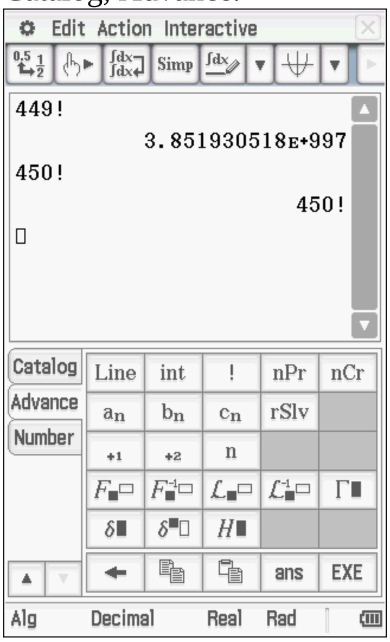
Hvis vi ønsker å få svar på hvor mange siffer $2^{64} - 1$ har, kan vi utføre beregningen som vist til høyre ovenfor.

Int gir heltallsverdien. Siden alle funksjoner og kommandoer ligger i Catalog, kan vi også finne int der. Det spiller ingen rolle om vi skriver Int eller int.

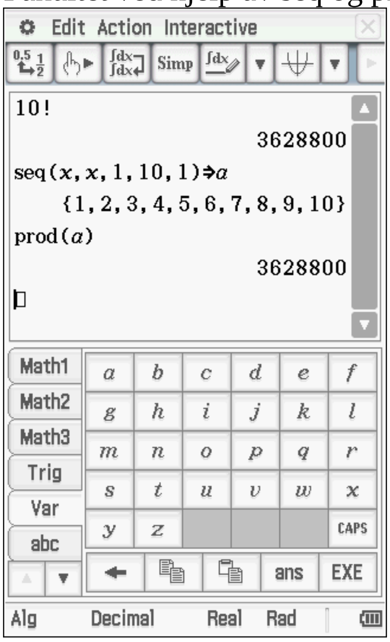
Vi ser at svaret gir 1 mindre enn antall siffer.

Vi kan også presentere store tall ved hjelp av fakultetsfunksjonen på lommeregneren. Vi husker at $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Catalog, Advance.



Fakultet ved hjelp av seq og prod.

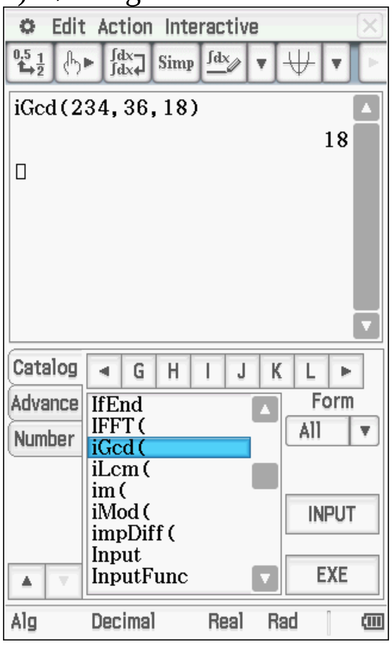


8.2 Tallfunksjonene iGcd, gcd, iLcm, lcm, iMod og mod

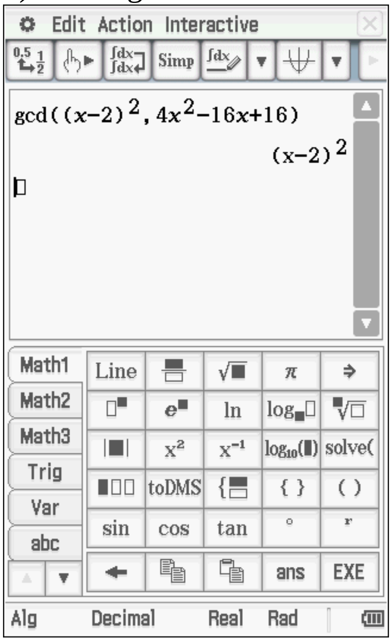
Lommeregneren er utstyrt med ulike tallfunksjoner som iGcd, gcd, iLcm, lcm, iMod og mod. I User Guide finner vi forklaring på forkortelsene. Vi nevner her at gcd står for ”greatest common divisor”. Bokstaven “i” foran indikerer at det handler om største felles mål (divisor) for hele tall (integer).

a) Finn største felles mål (divisor) for 234, 36 og 18.
b) Finn største felles mål for $(x-2)^2$ og $4x^2 - 16x + 16$

a) Løsning.

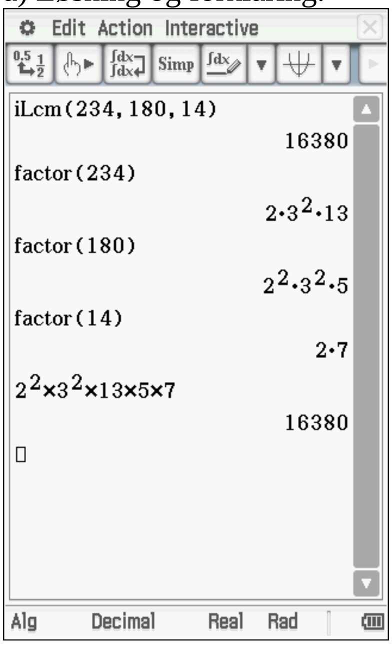


b) Løsning.

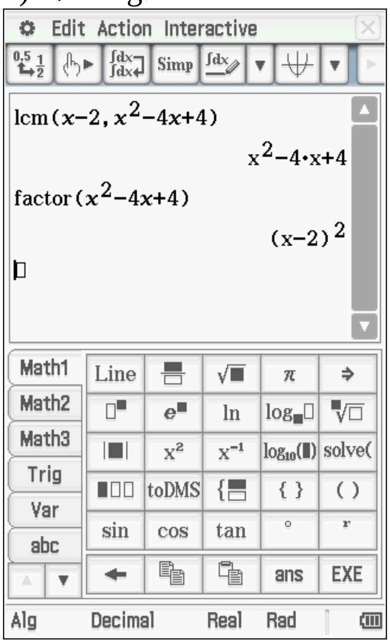


a) Finn minste felles multiplum for 234,180 og 14.
b) Finn minste felles multiplum for $(x-2)$ og $x^2 - 4x + 4$.

a) Løsning og forklaring.

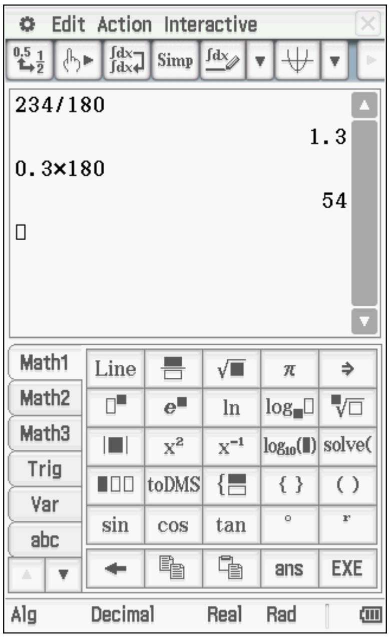


b) Løsning.

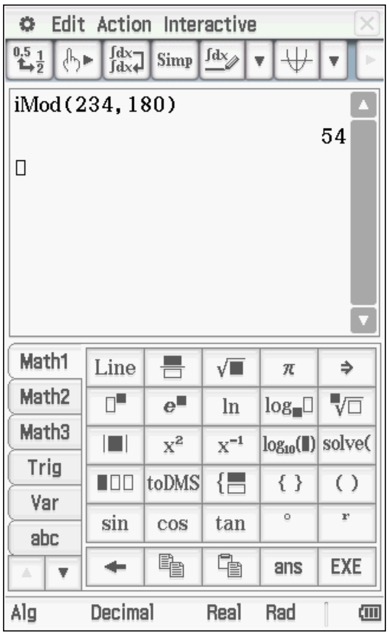


Finn delingsresten når 234 blir dividert med 180.

Uten bruk av iMod.



Med bruk av iMod.

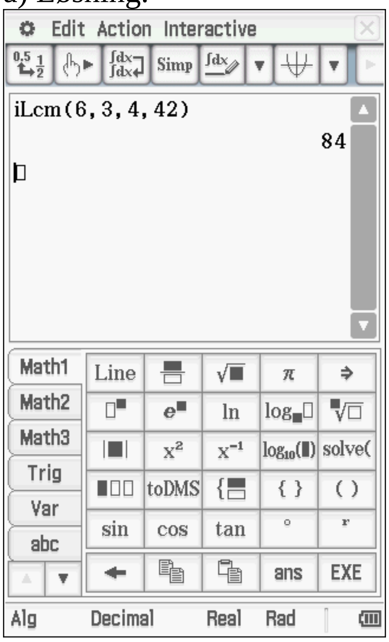


Delingsresten er altså 54.

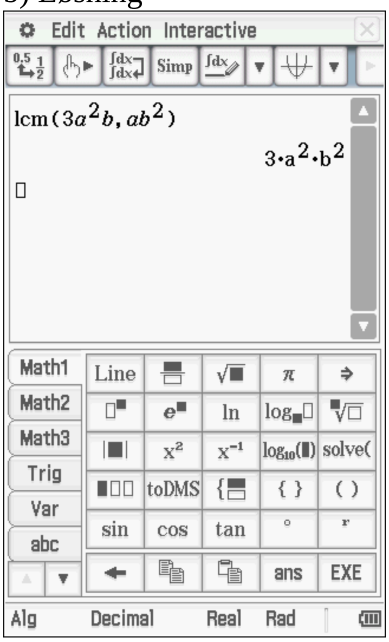
a) Finn fellesnevneren til brøkene $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ og $\frac{37}{42}$.

b) Finn fellesnevneren til brøkene $\frac{2}{3a^2b}$ og $\frac{1}{ab^2}$

a) Løsning.

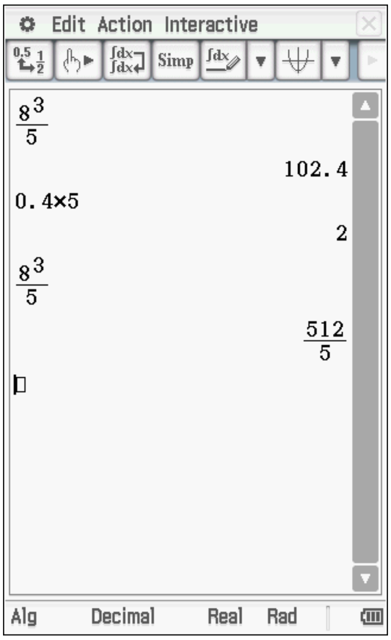


b) Løsning

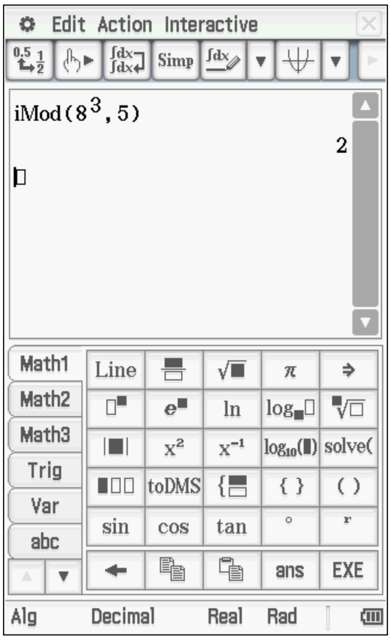


Finn delingsresten i regnestykket $8^3 : 5 =$

Uten bruk av iMod.



Med bruk av iMod.



I brøken $\frac{512}{5}$ bør det være mulig å se uten videre regning at delingsresten er 2.

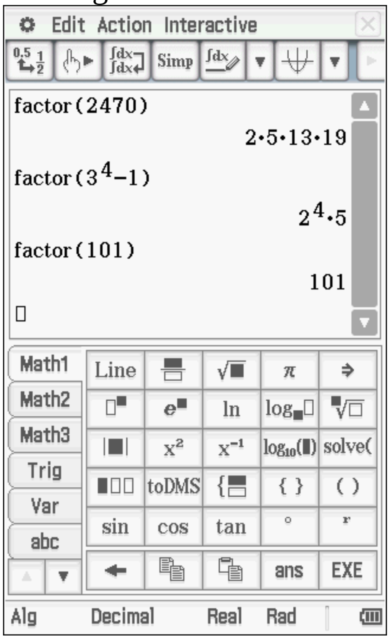
8.3 Primtall

Et primtall er et naturlig tall større enn 1 som bare er delelig (uten rest) med 1 og seg selv. Altså er 2, 3, 5, 7, 11, 13, … primtall. For å undersøke om et tall er et primtall kan vi dele tallet med alle tall mindre enn tallet og studere divisjonsresten. Hvis alle restene er forskjellig fra null, er tallet et primtall. Vi kan vise at det er tilstrekkelig å kontrollere resten etter å ha delt med primtall mindre enn kvadratroten av selve tallet. For å avgjøre om for eksempel 200 er et primtall, er det altså tilstrekkelig å undersøke resten vi får ved å dele med henholdsvis 2, 3, 5, 7, 11 og 13.

Vi har sett tidligere at vi kan faktorisere tall på CP400.

Faktoriser tallene 2470, $3^4 - 1$ og 101.

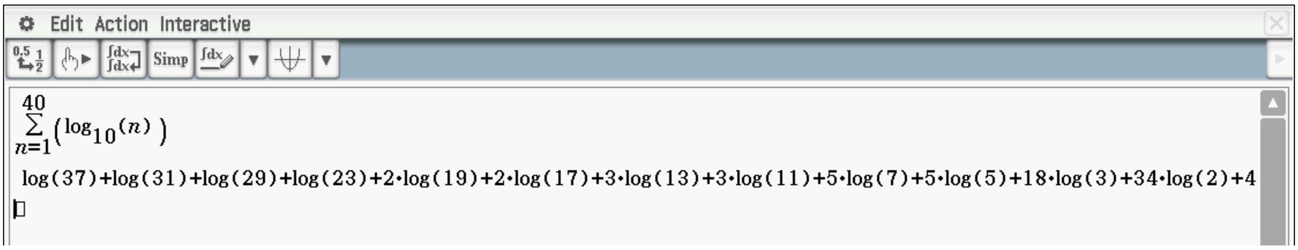
Løsning.



I det siste eksemplet returnerer CP400 tallet vi forsøker å faktorisere. Det betyr at dette tallet er et primtall.

Det finnes imidlertid en snarvei for å finne primtall på CP400.

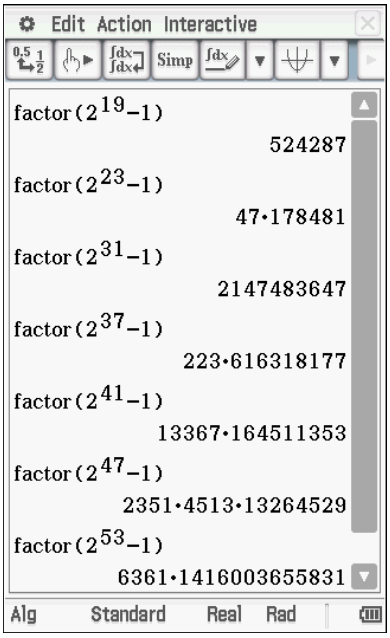
Regn ut $\sum_{n=1}^{40} \log_{10}(n)$ på CP400.

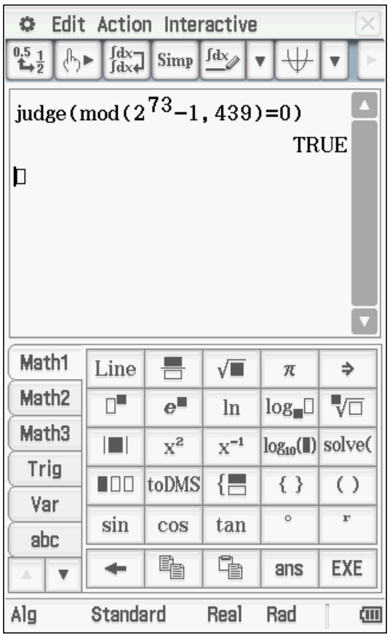


Vi ser at summen av logaritmer skrives om til multipler av logaritmer av primtall.

Jakten på stadig større primtall har lenge vært en "sport" i matematikk. Fra tid til annen får vi høre om nye primtallsrekorder. Da har noen greid å finne et nytt primtall større enn noe annet kjent primtall. Jakten på store primtall fortsetter stadig.

Mulige tall som kan være primtall, er ofte tall på formen $2^n - 1$. Slike tall kaller vi Mersenne-tall etter Marin Mersenne (1588 – 1648). Tall på denne formen som faktisk viser seg å være primtall, kaller vi Mersenne-primtall. Mersenne viste at hvis n er et sammensatt tall, så må også $2^n - 1$ være et sammensatt tall. La oss granske dette.





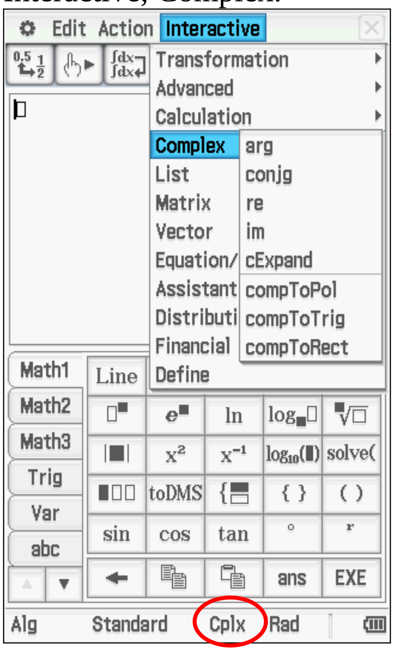
I det første og det tredje eksemplet gir CP400 et tall og ikke et produkt. Det må bety at dette tallet er et primtall. Så sent som i 1883 ble det vist at $2^{61}–1$ er et primtall.

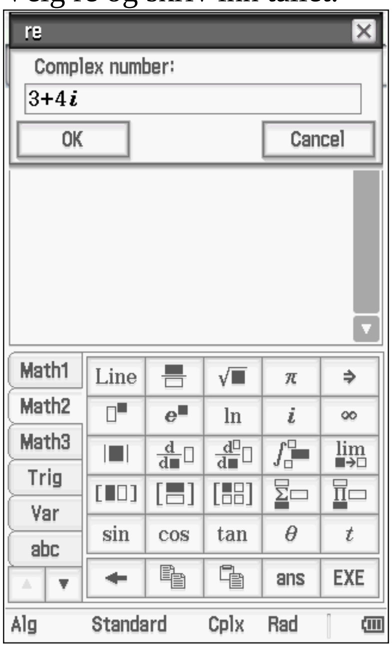
Det finnes andre funksjoner på CP400 som kan bli brukt til å undersøke i hvilken kategori et tall tilhører. Kapasitetsproblemene på CP 400 starter rundt 2^{60}. Vi kan imidlertid skaffe oss noe viten ved å teste for delelighet som vist i eksempel til høyre ovenfor.

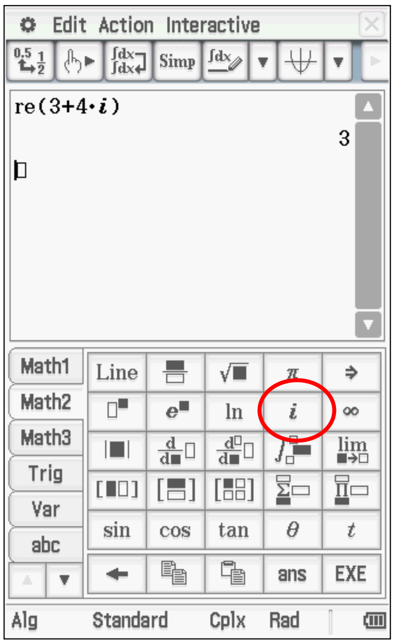
8.4 Komplekse tall

 Finn realdelen og imaginærdelen til det komplekse tallet $3+4i$.

Interactive, Complex. Velg re og skriv inn tallet.

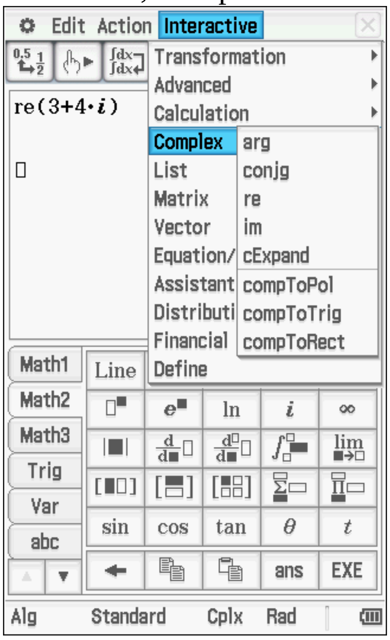




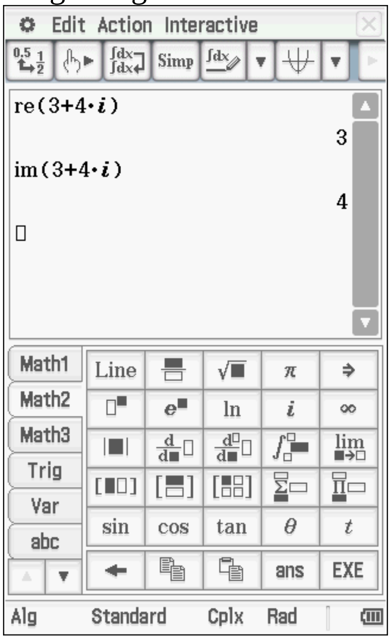


Realdelen er 3.

Interactive, Complex.



Velg im og skriv inn tallet.

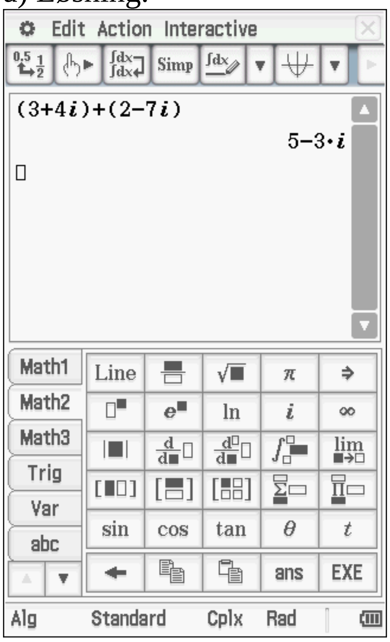


Imaginærdelen er 4.

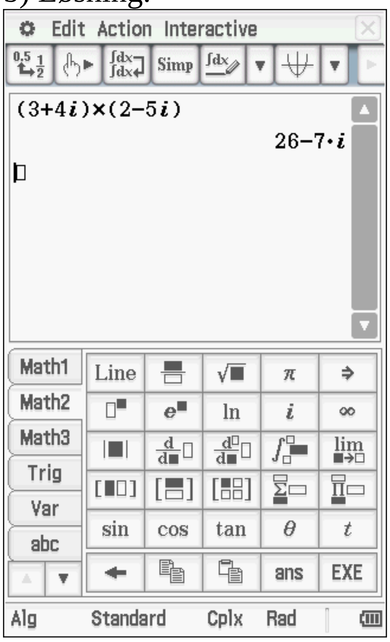
a) Regn ut: $(3+4\mathrm{i})+(2-7\mathrm{i})$.

b) Regn ut: $(3+4\mathrm{i})\cdot(2-5\mathrm{i})$.

a) Løsning.



b) Løsning.

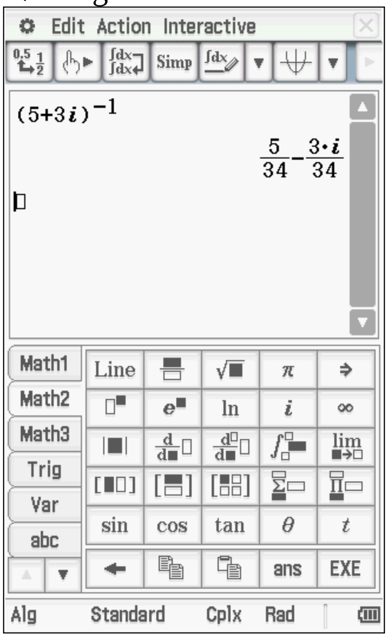


Den inverse verdien av det komplekse tallet $(a+b\mathrm{i})$ skriver vi som $(a+b\mathrm{i})^{-1}$.

Følgende regneregel gjelder: $(a+b\mathrm{i})^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$

Verifiser regneregelen ovenfor ved å regne ut $(5+3i)^{-1}$.

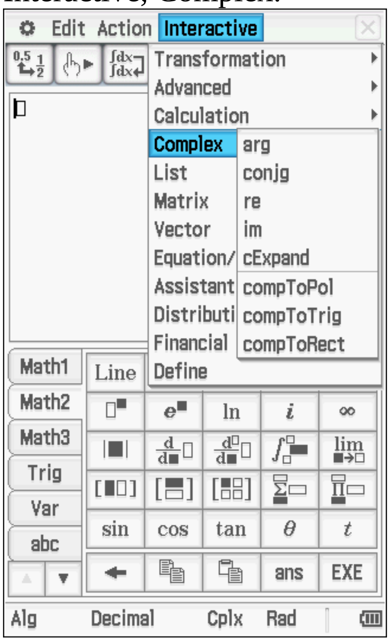
Løsning.



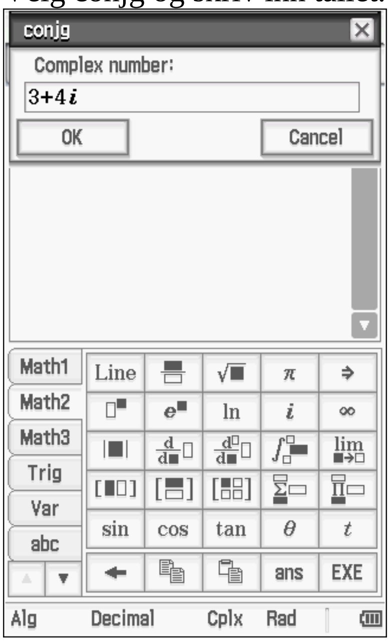
Sett $a=5$ og $b=3$ og kontroller selv.

Finn den konjugerte til $3+4i$.

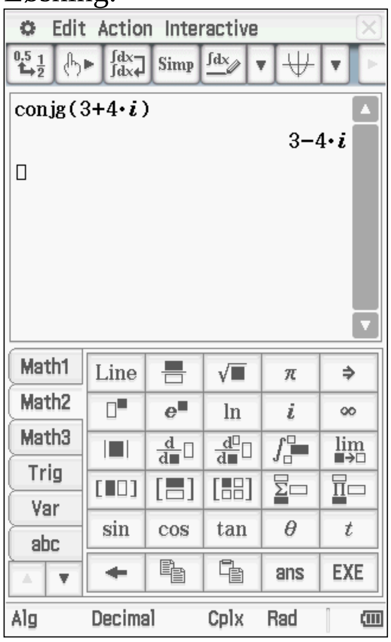
Interactive, Complex.



Velg conjg og skriv inn tallet.

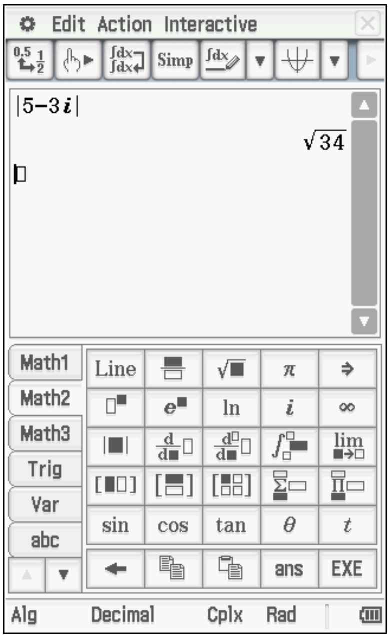


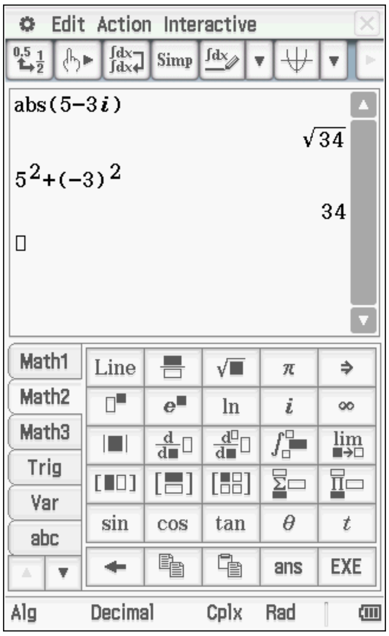
Løsning.



Eksperimenter med et komplekst tall og den konjugerte. Hvilke regneregler for sum, differanse, multiplikasjon og divisjon kan du verifisere på lommeregneren?

Finn absoluttverdien til $5-3i$.

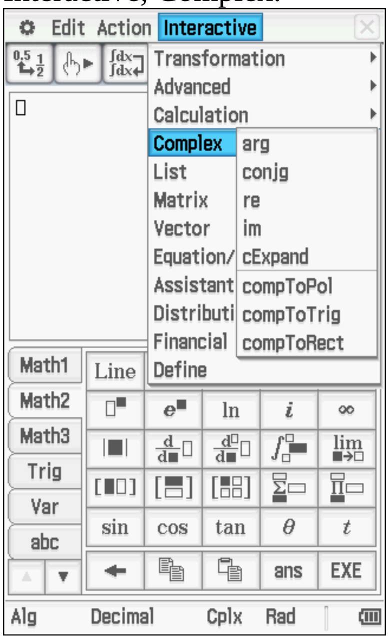




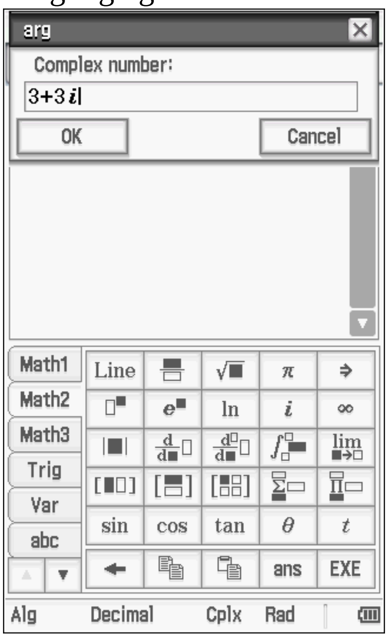
Hvilken regneregel ser ut til å gjelde?

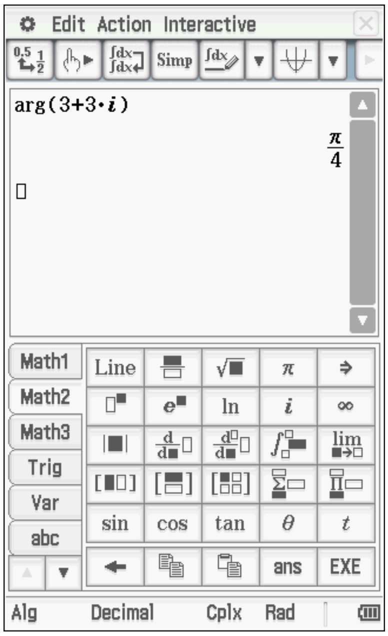
Finn argumentet til $3+3i$.

Interactive, Complex.



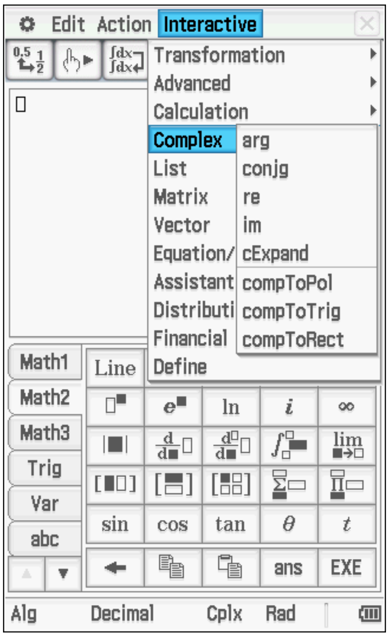
Velg arg og skriv inn tallet.



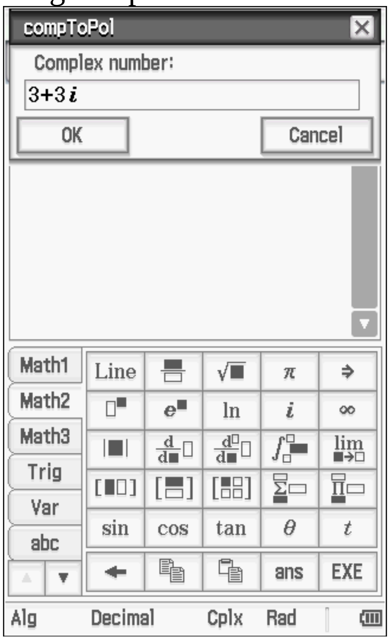


Lommeregneren er i Rad-mode. Hvorfor blir argumentet $\frac{\pi}{4}$ i dette tilfellet?

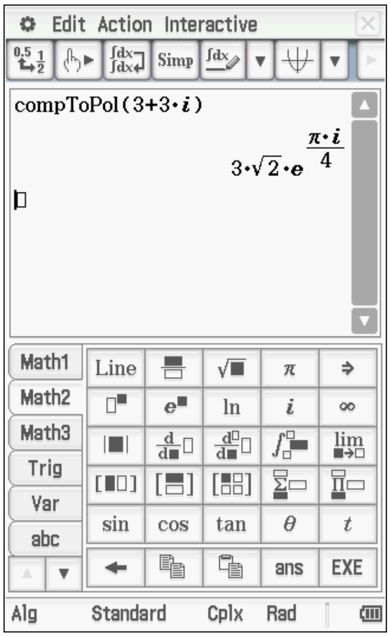
Skriv det komplekse tallet $3+3i$ på eksponentiell form.



Velg compToPol. Skriv tallet.

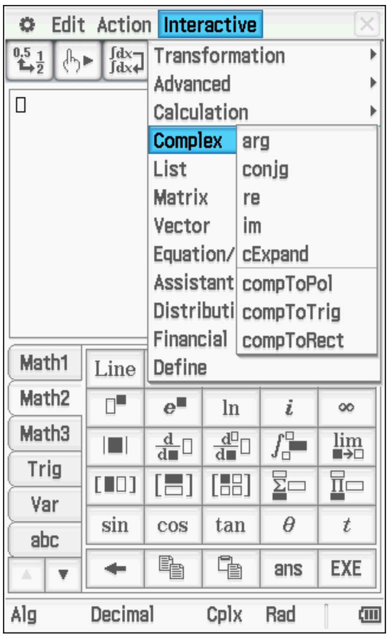


Svar.

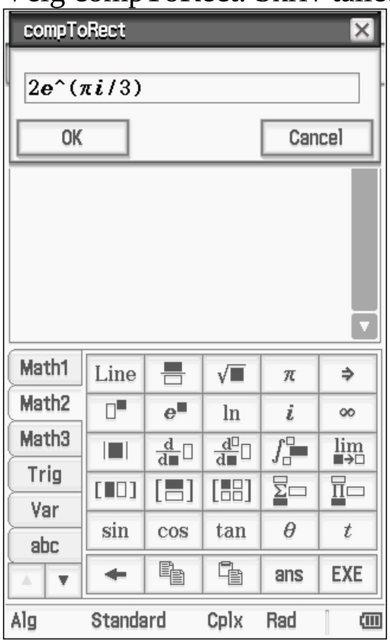


På eksponentiell form: $3\sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\cdot\pi}{4}}$.

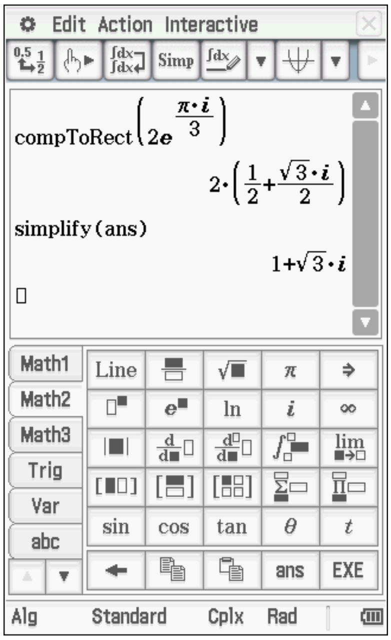
Skriv det komplekse tallet $2\cdot e^{\frac{\pi\cdot i}{3}}$ på formen $a+b\,i$.



Velg compToRect. Skriv tallet.



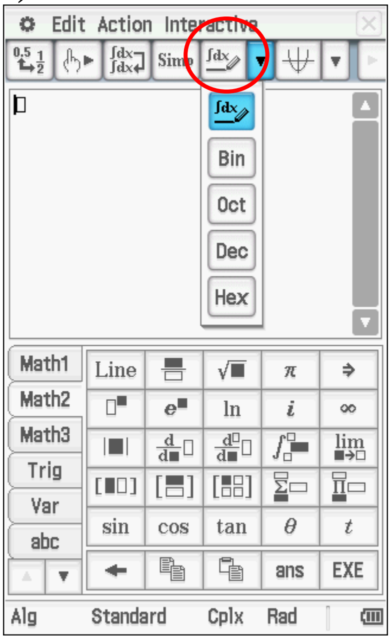
Svar.

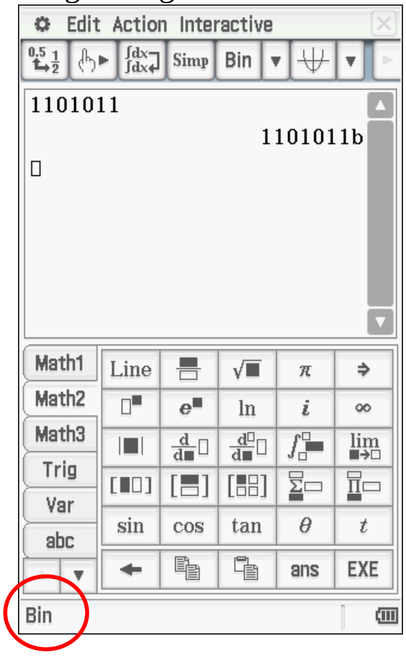


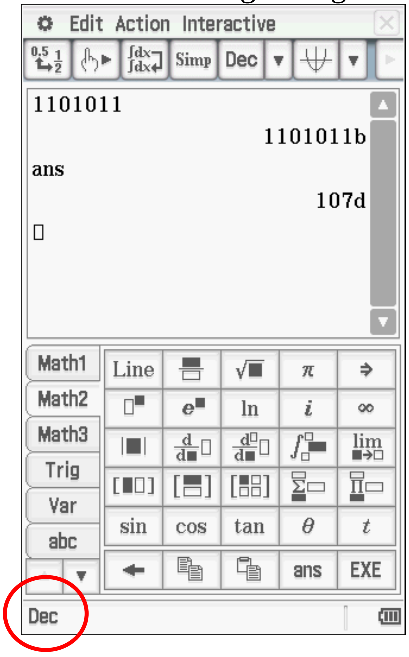
8.5 Binære og heksadesimale tall

a) Gjør om det binære tallet 1101011 til desimalt tall.
b) Gjør om 107 til et binært tall.

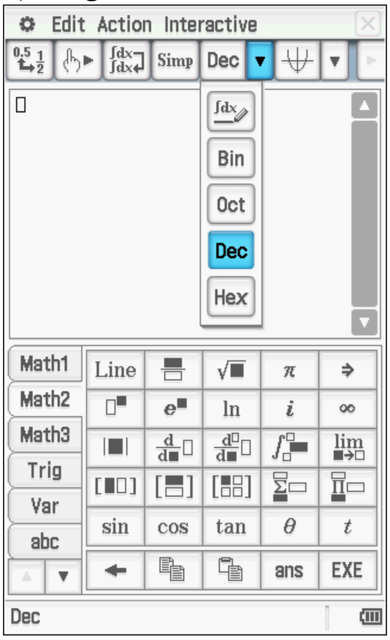
a) Gå inn i Main. Velg Bin og skriv tallet. Skift til Dec. Velg ans og EXE.

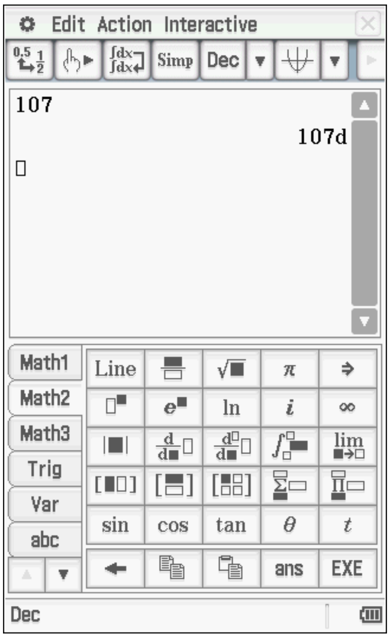


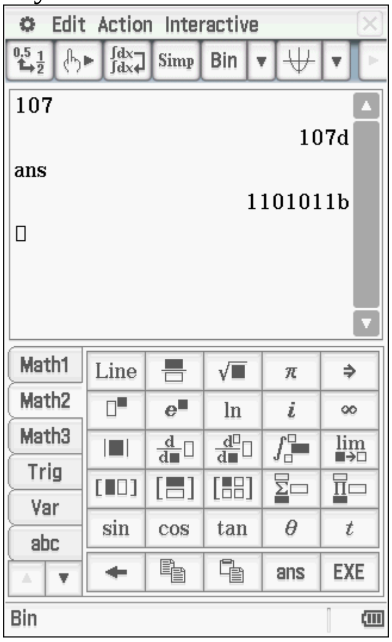




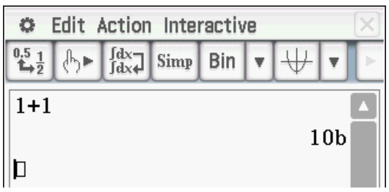
b) Velg Dec. Skriv tallet. Trykk ans. Skift til Bin. EXE.







Her ser vi at 107_{10} er gjort om til 1101011_{2}

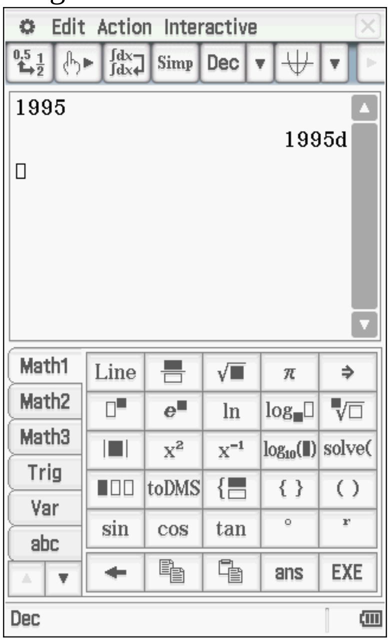


Øv på regningsartene med forskjellig base for tall.

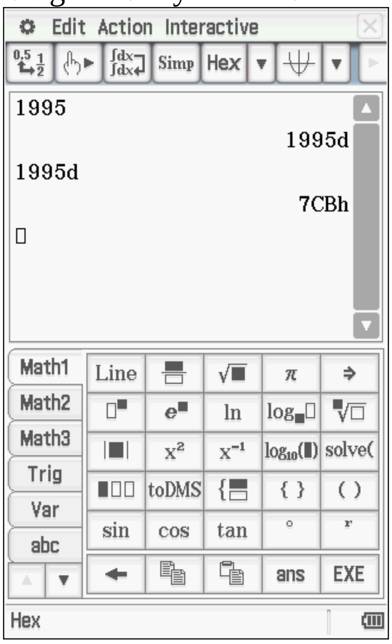
Vis på lommeregneren at det heksadesimale tallet $7CB_{16}$ er lik 1995_{10}

Vi velger å gjøre om det desimale tallet 1995 til heksadesimal form.

Velg Dec. Skriv tallet.



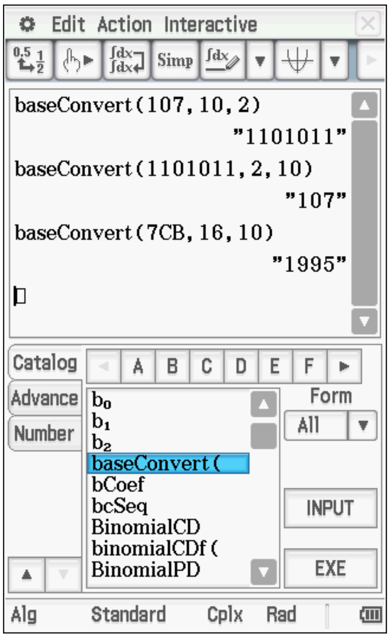
Velg Hex. Trykk EXE.



Du kan utføre addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon i de ulike tallsystemene. Øv selv.

Kommentar:

Vi kan også konvertere et tall fra et tallsystem til et annet ved hjelp av kommandoen baseConvert. Se skjermbildet nedenfor.



9. Vektorer

9.1 Skalar og vektor

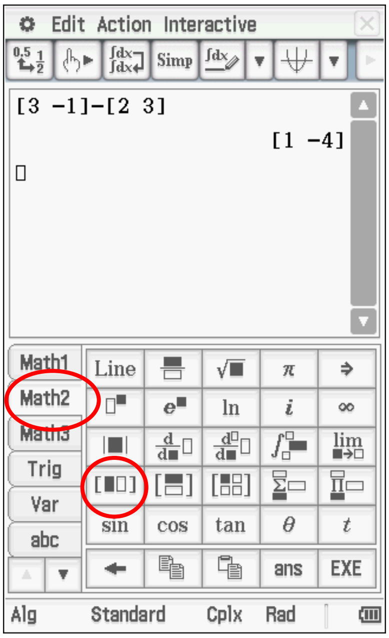
En skalar er et mål for størrelse eller mengde. Masse er et typisk eksempel på en skalar. Temperatur er et annet eksempel på en skalar. Måltall og enhet er tilstrekkelig for å oppgi massen til en gjenstand eller temperaturen en vinterdag.

En vektor derimot har både størrelse og **retning**. Eksempler på vektorer er kraft, hastighet, akselerasjon, elektrisk feltstyrke, dipolmoment etc. Vi uttykker altså en vektor både ved å oppgi en skalar og en **retning**. En vektor illustreres ofte ved en rett linje med en bestemt lengde og en gitt pilretning. Når vi skriver matematisk tekst skiller vi en vektor fra en skalar ved å benytte uthevet skrift, bokstav med pil over eller bokstav med rett strek under, $\boldsymbol{A}$, $\vec{A}$ or $\underline{A}$.
Lengden av vektoren $\vec{A}$ skriver vi vanligvis som $\left|\vec{A}\right|$.

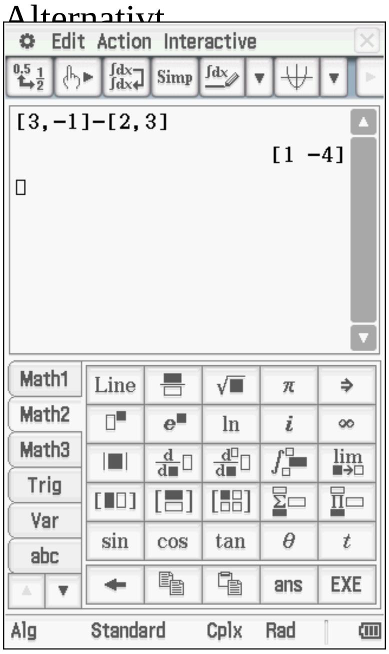
9.2 Vektorer i planet

En vektor $\vec{u}$ fra startpunktet $P(x_1, y_1)$ til endepunktet $Q(x_2, y_2)$ tegner vi som en pil som starter i P og som ender i Q og med pilretning fra P til Q. Vi uttrykker $\vec{u}$ som $\vec{u} = [u_1, u_2]$ der $u_1 = x_2 - x_1$ og $u_2 = y_2 - y_1$. En vektor som starter i origo $(0,0)$, kaller vi en posisjonsvektor. Vi minner om at en vektor i planet består av både størrelse og retning. Komponentene u_1 og u_2 kaller vi henholdsvis første og andre komponent til $\vec{u}$.

En vektor har startpunkt $P(2,3)$ og endepunkt $Q(3,-1)$. Bestem vektoren $\overrightarrow{PQ}$ i *xy*-planet.



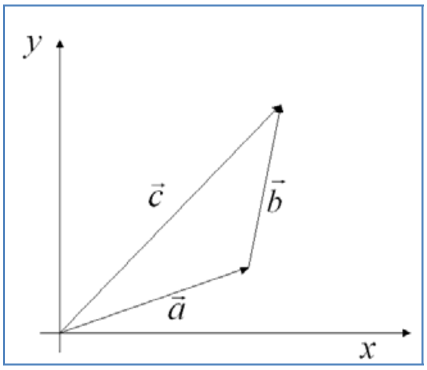
Alternativt



$$\overrightarrow{PQ} = [3-2, -1-3] = [1, -4]$$

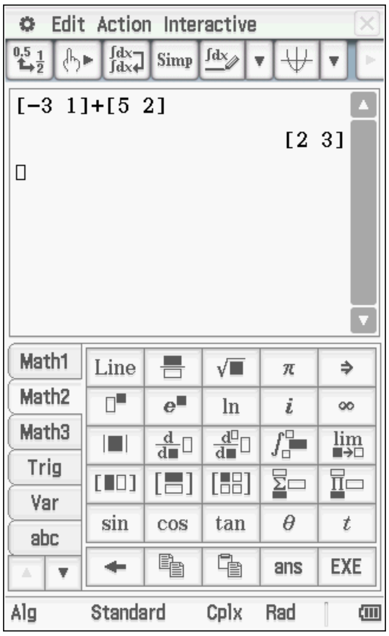
9.3 Addisjon av vektorer

Addisjon av to vektorer i *xy*-planet kan utføres grafisk ved å legge vektorene slik figuren nedenfor viser. Vi legger $\vec{a}$ slik at denne vektoren starter i origo. Videre parallellforskyver vi $\vec{b}$ slik at denne vektoren starter i endepunktet til $\vec{a}$. Summen $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ framkommer da som en vektor med start i origo og felles endepunkt med $\vec{b}$. De tre vektorene danner altså en trekant.



Addisjon av vektorer kan også utføres algebraisk.

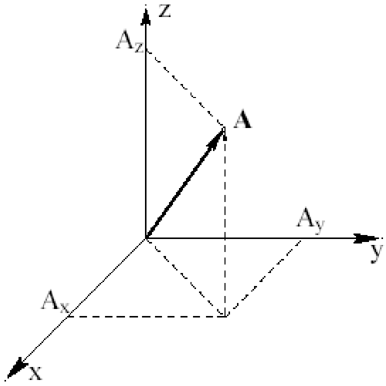

Summer de to vektorene $\vec{a} = [-3,1]$ og $\vec{b} = [5,2]$.



Vi summerer *x*-komponentene til begge vektorene og *y*-komponentene til begge vektorene og får den såkalte resultantvektoren $\vec{c} = [2,3]$.


Bruk CP400 til å summere to eller flere vektorer på koordinatform.

9.4 Vektorer i et tredimensjonalt koordinatsystem



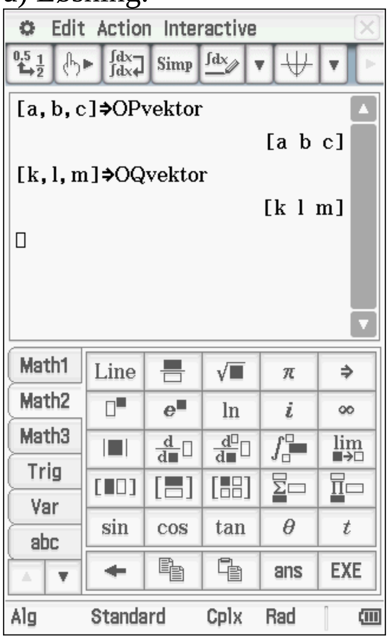
En vektor i rommet kan uttrykkes ved hjelp av komponentene til vektoren i et tredimensjonalt koordinatsystem.

Vi kan skrive $\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$.

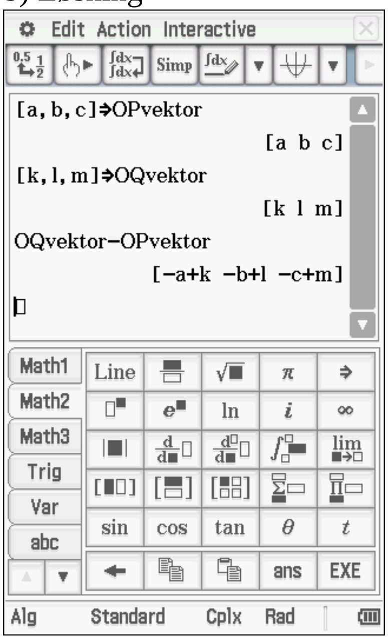
Vektoren fra punktet $P(x_1, y_1, z_1)$ til $Q(x_2, y_2, z_2)$ er $\overrightarrow{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$
Den såkalte *nullvektoren* er en vektor med lengde 0. Det betyr at alle komponentene til nullvektoren er lik null. Vi skriver nullvektoren som $\vec{0}$. Vi kan tilordne et bestemt navn til en vektor.

a) Gi vektoren $[a, b, c]$ navnet OPvektor, og vektoren $[k, l, m]$ navnet OQvektor.
b) Bestem PQvektor.

a) Løsning.



b) Løsning



9.5 Lengden til en vektor

La oss først starte med størrelsen av en skalar. Vi definerer *størrelsen til en skalar* som absoluttverdien til skalaren. Både skalaren 7 og skalaren -7 har altså størrelsen 7.

I to dimensjoner kan vi finne lengden til en vektor ved å bruke Pythagoras´ læresetning. Dersom vi har vektoren $\vec{v} = [v_x, v_y]$, finner vi lengden til vektoren ved $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$.

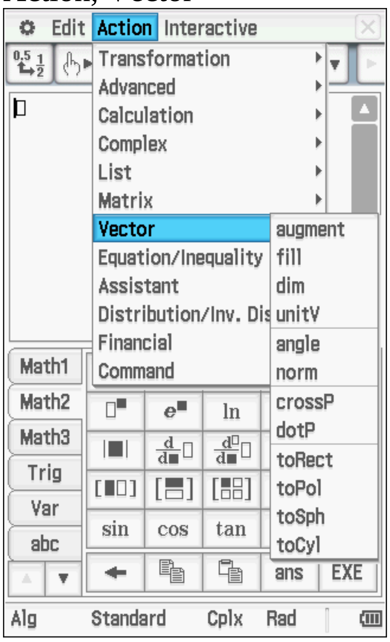
Betrakter vi en vektor i tre dimensjoner, kan vi skrive $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$. Lengden til denne vektoren kan vi bestemme ved først å finne lengden til vektoren $\vec{v} = [v_x, v_y, 0]$. Denne vektoren danner sammen med vektoren $[0, 0, v_z]$ en ny rettvinklet trekant. Lengden til $\vec{v} = [v_x, v_y, 0]$ er $\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$, og lengden til $[0, 0, v_z]$ er $|v_z|$. Vi anvender Pythagoras´ læresetning enda en gang og finner at

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2})^2 + |v_z|^2} = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

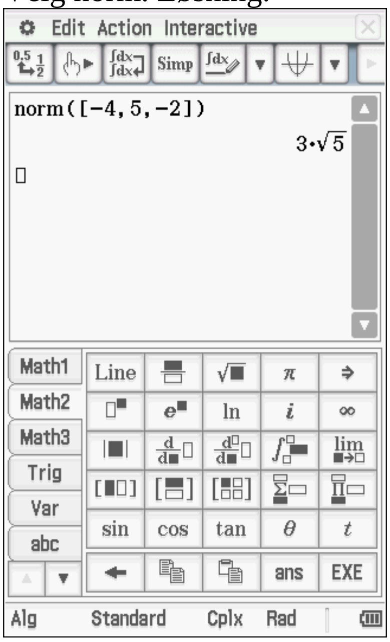
Bestem lengden til vektoren $\vec{v} = [-4, 5, -2]$.

Ifølge formelen ovenfor får vi at $|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}$

Action, Vector

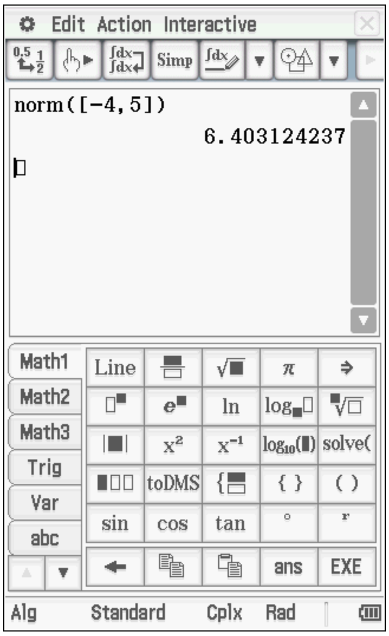


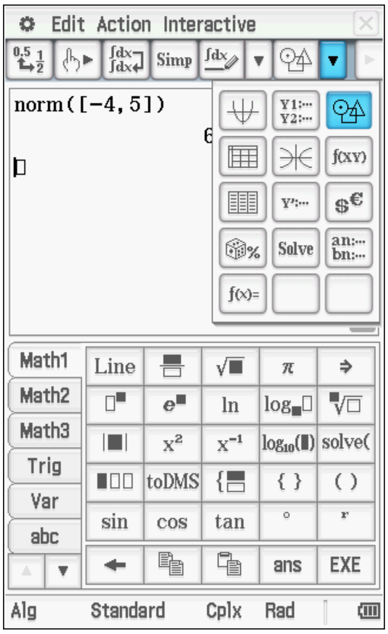
Velg norm. Løsning.

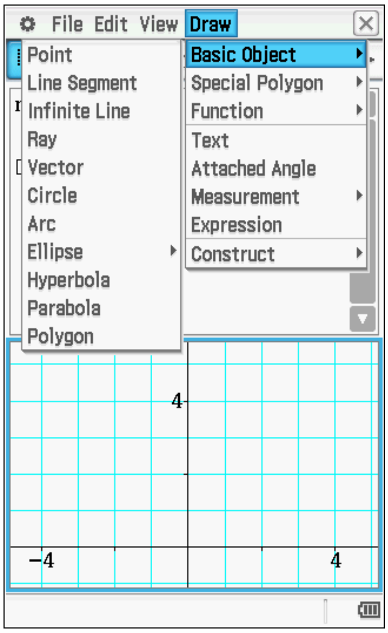


På CP400 kan vi enkelt bruke funksjonen norm for å bestemme lengden til en vektor.

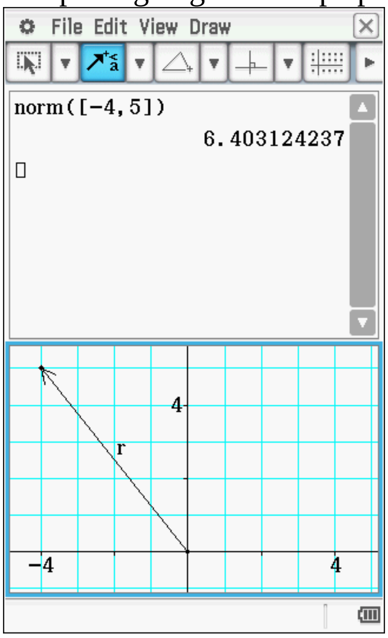
Bestem lengden til [–4,5] og tegn vektoren i koordinatsystemet.

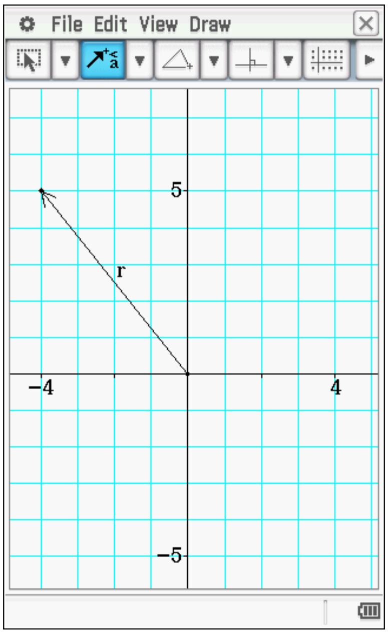




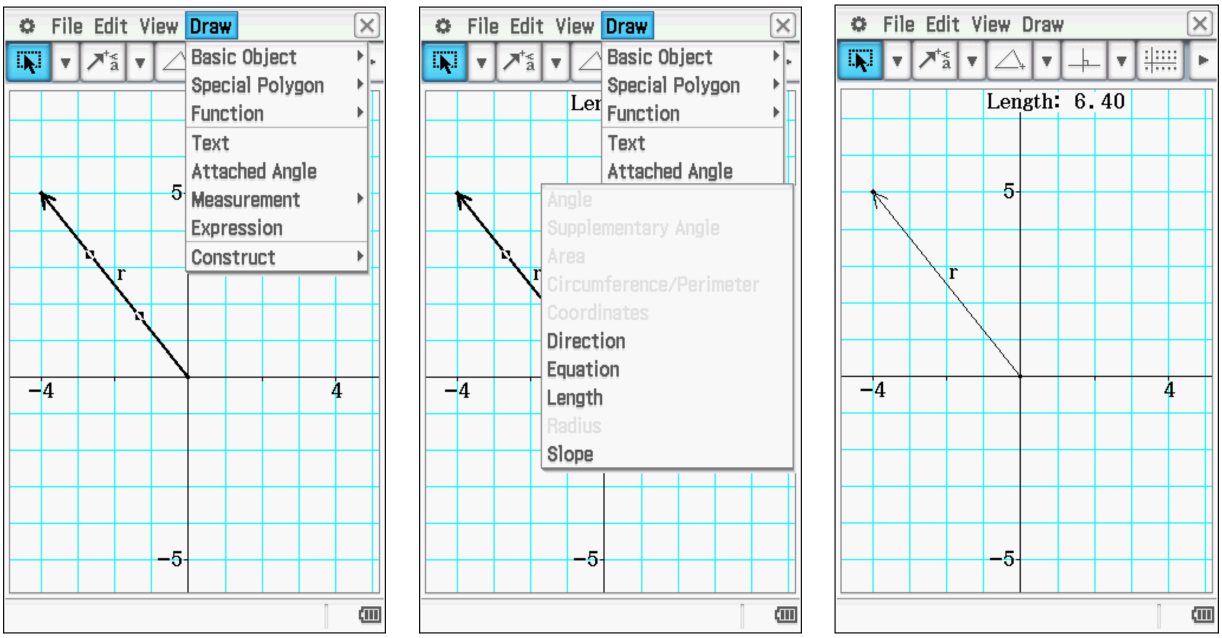


Velg vector i Draw.
Pek på origo og deretter på punktet (–4,5).





Velg Measurement. Velg Length. Svar.



Her har vi brukt CP400 til å bestemme lengden av vektoren [–4,5] både i Main- og i Geometry-applikasjonen.

9.6 Enhetsvektor

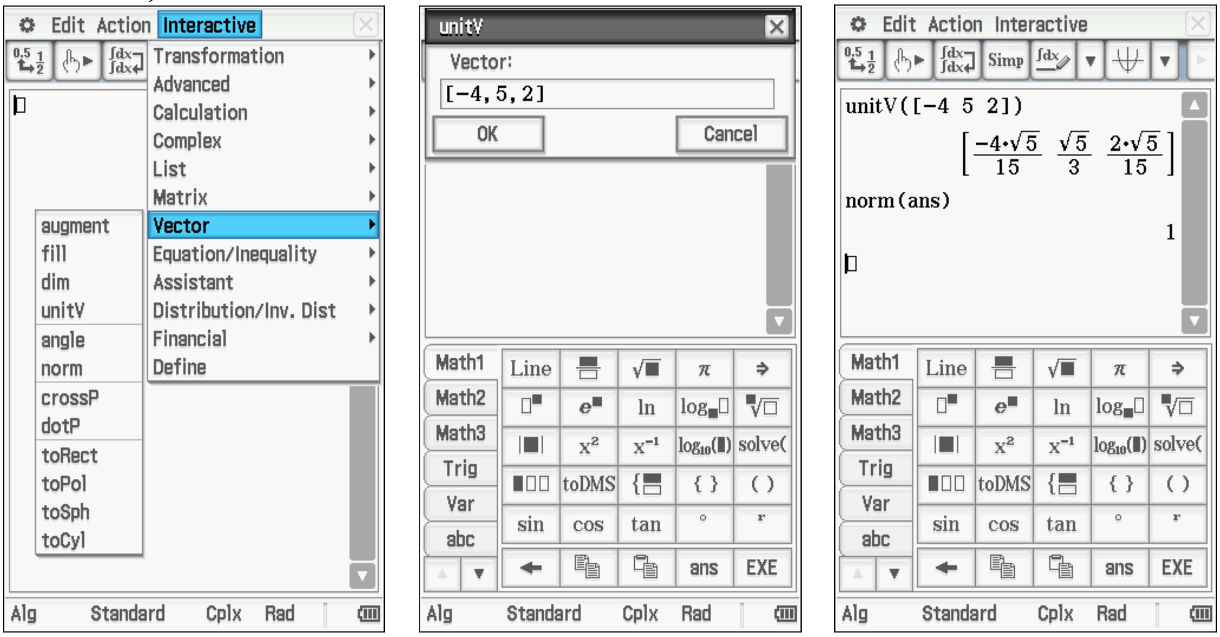
En såkalt enhetsvektor blir vanligvis skrevet som $\vec{e}$. Lengden til en enhetsvektor er $|\vec{e}| = 1$
En vektor kan transformeres om til en enhetsvektor ved å dividere vektoren med sin egen lengde. Det betyr at en vektor kan uttrykkes ved lengden multiplisert med en enhetsvektor. Denne enhetsvektoren må ha samme retning som vektoren. I vektoralgebra er det vanlig å uttrykke en vektor ved hjelp enhetsvektorene på hver av aksene i et koordinatsystem og komponentene til vektoren parallell med aksene. Enhetsvektoren i positiv retning på *x*-aksen er $\vec{i} = [1,0,0]$. I positiv retning på *y*-aksen er enhetsvektoren $\vec{j} = [0,1,0]$. Enhetsvektoren i positiv retning på *z*-aksen er $\vec{k} = [0,0,1]$. Det betyr altså at $[x, y, z] = x[1,0,0] + y[0,1,0] + z[0,0,1] = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Tidligere i dette kapitlet fant vi at lengden til vektoren $\vec{v} = [-4,5,-2]$ er $3\cdot\sqrt{5}$. Det betyr altså at $\vec{v} = [-4,5,-2]$ kan bli transformert om til en enhetsvektor ved

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[-4,5,-2]}{3\cdot\sqrt{5}} = [\frac{-4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-2}{3\sqrt{5}}] = [\frac{-4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{-2\sqrt{5}}{15}]$$

Transformer $\vec{v} = [-4, 5, -2]$ om til en enhetsvektor.

Interactive, Vector.



Her ser vi hvordan vi ved hjelp av CP400 kan transformere $\vec{v} = [-4, 5, -2]$ om til en enhetsvektor. Samtidig kontrollerer vi av at lengden av enhetsvektoren faktisk blir 1

Velg forskjellig vektorer og transformer disse om til enhetsvektorer. Kontroller resultatet både på lommeregneren og ved å regne for hånd.

9.7 Skalarprodukt

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er definert ved $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ hvor θ er vinkelen mellom de to vektorene. I enkelte lærebøker blir skalarproduktet omtalt som prikkproduktet. Vi kan oversette prikk med ”dot” til engelsk. Det følger at hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ($\vec{a}$ og $\vec{b}$ begge er ikke-null vektorer), så er $\vec{a}$ vinkelrett på $\vec{b}$. Geometrisk betraktet er skalarproduktet av to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ lengden av projeksjonen av $\vec{a}$ på $\vec{b}$, multiplisert med lengden av $\vec{b}$. De to vektorene er da parallellforskjøvet slik at de starter i samme punkt.

Når vi arbeider med vektorer i et rettvinklet og todimensjonalt koordinatsystem kan skalarproduktet av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ uttrykkes som $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Undersøk dette ved hjelp av CP400 eller på annen måte.

Finn skalarproduktet til de to vektorene $\vec{a}=[-3,2,5]$ og $\vec{b}=[3,-2,1]$. Bestem også vinkelen mellom disse to vektorene.

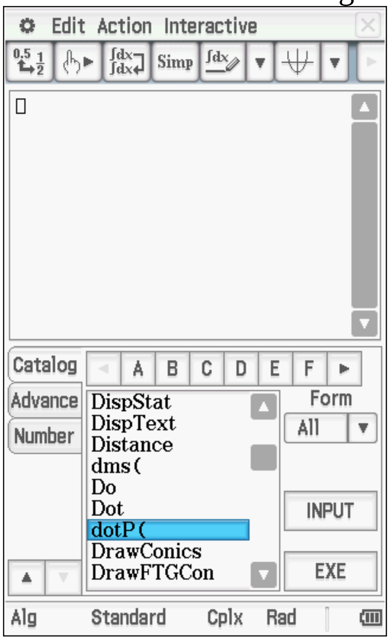
Vi finner skalarproduktet ved $\vec{a}\cdot\vec{b}=[-3,2,5]\cdot[3,-2,1]=-3\cdot 3+2\cdot(-2)+5\cdot 1=-9-4+5=-8$

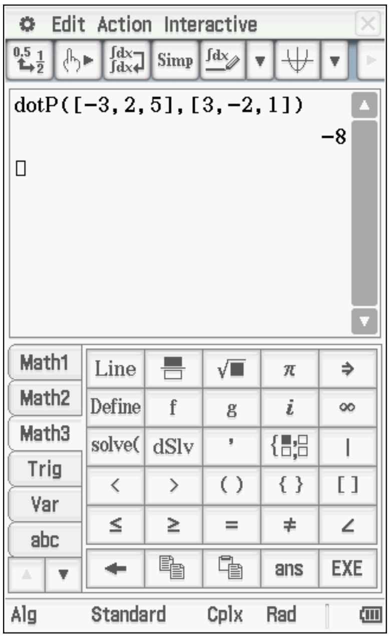
Vinkelen mellom de to vektorene blir derfor

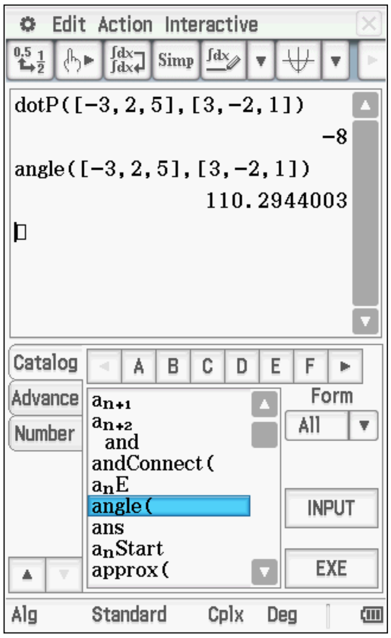
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-8}{\sqrt{(-3)^2+2^2+5^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{-8}{\sqrt{38}\sqrt{14}}=\frac{-8}{2\sqrt{133}}=\frac{-4\sqrt{133}}{133}$$

Altså er $\theta=110{,}3^{\circ}$. Vi kontrollerer svarene ovenfor ved å utføre operasjonene dotP og angle på CP400.

Vi kan finne dotP i Catalog.







Vi ser at svarene blir bekreftet på CP400. Forsøk andre eksempler på egen hånd.

Verifiser på CP400 at skalarproduktet er kommutativt, det vil si $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

Verifiser også på CP400 at skalarproduktet er distributivt, det vil si $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

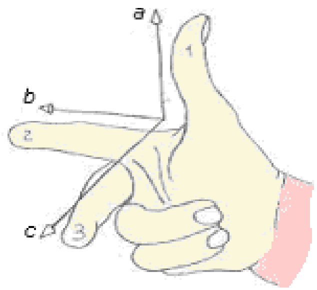
Trekanten ABC har hjørnene $A(2,1,-1)$, $B(-1,0,2)$ og $C(1,-2,2)$. Bruk CP400 til å beregne vinklene i trekanten.

Gransk følgende påstand: Skalarproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{a}$ gir $|\vec{a}|^2$.

9.8 Kryssproduktet (vektorproduktet)

I noen lærebøker omtales kryssprodukt som vektorprodukt. Vi velger her begrepet kryssprodukt siden CP400 bruker ”crossP”. Kryssproduktet blir brukt svært mye i fysikk – særlig i mekanikk og elektromagnetisme. I mekanikk anvendes kryssproduktet i forbindelse med blant annet ulike former for dreining. I elektromagnetisme spiller kryssproduktet en svært viktig rolle særlig i forbindelse med krefter mellom ladde partikler i bevegelse.

Definisjon: Gitt vektorene $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ og $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$.
Kryssproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ er definert som vektoren $[a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$
Vi finner retningen til kryssproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ ved hjelp av den såkalte høyrehåndsregelen. Hvis fingrene på høyre hånd krummer seg fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ mindre enn 180^{o}, vil tommelen peke i retningen til $\vec{a} \times \vec{b}$.

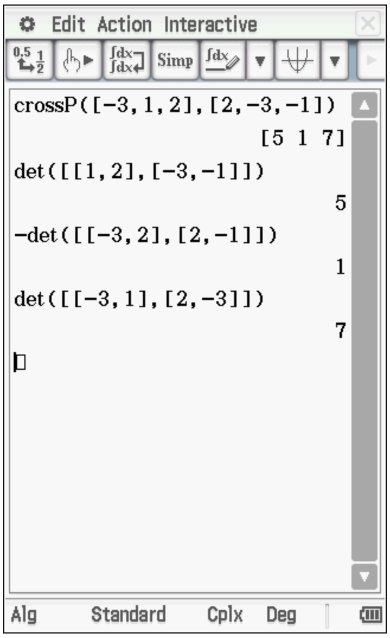


Vi kan også finne kryssproduktet ved hjelp av determinanter. Hvis $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ og $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ så er

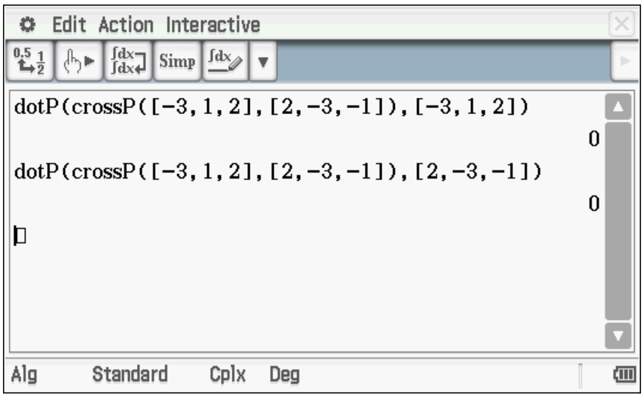
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$$

Vi har gitt de to vektorene $\vec{a} = [-3, 1, 2]$ og $\vec{b} = [2, -3, -1]$. Bestem kryssproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ både direkte og ved hjelp av en 3×3 determinant på CP400.



Vi har gitt de to vektorene $\vec{a} = [-3, 1, 2]$ og $\vec{b} = [2, -3, -1]$. Verifiser på CP400 at kryssproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ står loddrett både på $\vec{a}$ og på $\vec{b}$.

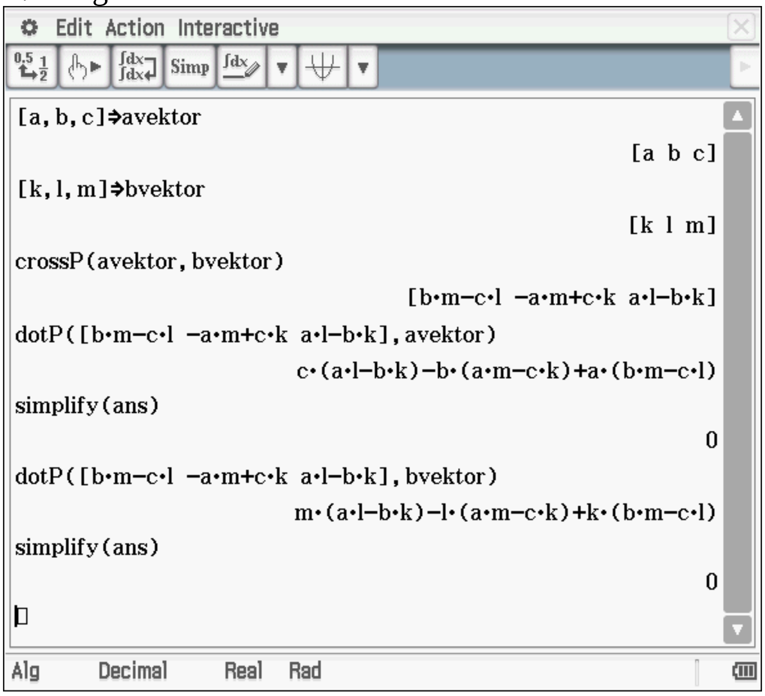


På skjermen ovenfor ser vi at første linje gir $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$. Det betyr at $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$.
Hva viser andre linje?

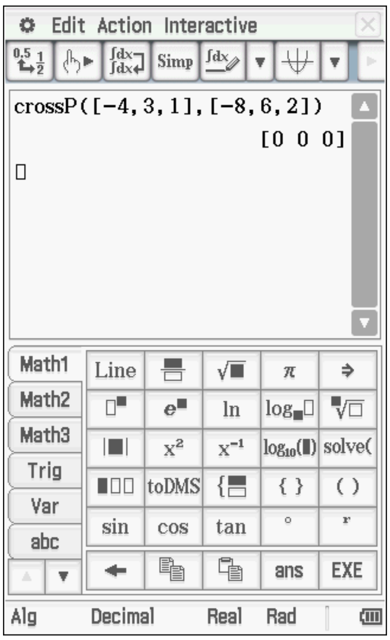
Så prøver vi å avansere fra et spesialtilfelle til det generelle.

Vis at kryssproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ alltid er loddrett på både $\vec{a}$ og på $\vec{b}$.

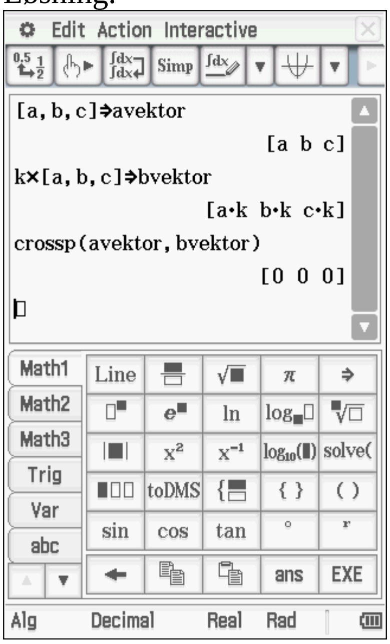
Løsning.



Ta utgangspunkt i spesialtilfellet på skjermbildet til venstre. Undersøk om vi kan påstå at $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ hvis vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.



Løsning.



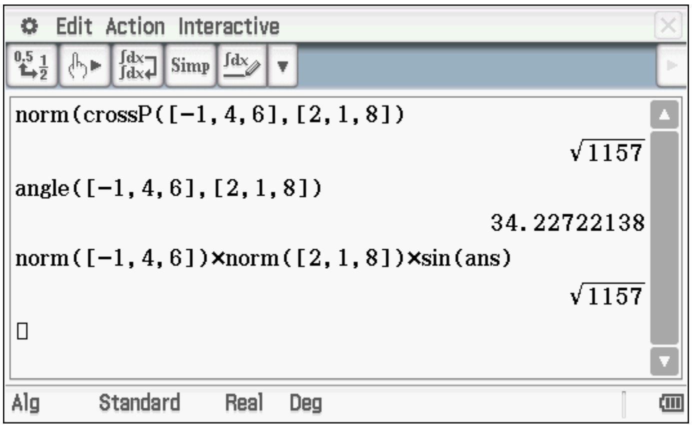
9.9 Parallellogram

Arealet A til et parallellogram utspent av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er gitt ved $A = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$,

hvor θ er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ($0 \le \theta \le \pi$). I samsvar med definisjonen av kryssproduktet kan vi også bestemme arealet til parallellogrammet ved $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Et parallellogram har hjørnene $P(1, 0, -1)$, $Q\ (0, 4, 5)$ og $R(3, 1, 7)$. Finn arealet til parallellogrammet.

La $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = [-1, 4, 6]$ og $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = [2, 1, 8]$. Vi finner arealet til parallellogrammet ved hjelp av CP400.



Her ser vi at likheten $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ blir verifisert. Arealet er altså $\sqrt{1157}$ arealenheter.

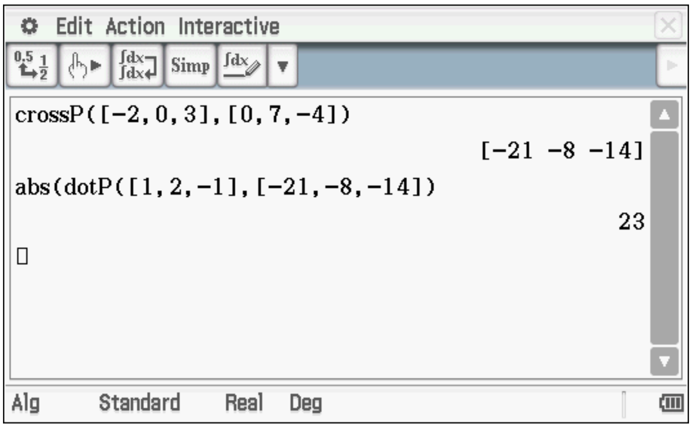
Hvordan kan vi finne arealet til trekanten PQR der hjørnene er $P(1, 0, -1)$, $Q\ (0, 4, 5)$ og $R(3, 1, 7)$? Prøv selv.

9.10 Parallellepiped

Produktet $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ kaller vi trippelskalarproduktet til $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ (i nevnte rekkefølge).
Vi ser av formelen $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$ at trippelskalarproduktet representerer volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Verdien av $|\vec{a} \times \vec{b}|$ representerer i dette tilfellet arealet av grunnflaten i parallellogrammet. Videre forteller $|\vec{c}|\cos\theta$ hvor høyt pilspissen til $\vec{c}$ befinner seg over planet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Hvis θ er større enn 90°, blir $\cos\theta$ negativ. Da er det nødvendig å ta absoluttverdien til $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ for å oppgi volumet av parallellepipedet. Volum er en positiv størrelse.

Finn volumet av parallellepipedet som er utspent av $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ og $\vec{c} = 7\vec{j} - 4\vec{k}$.

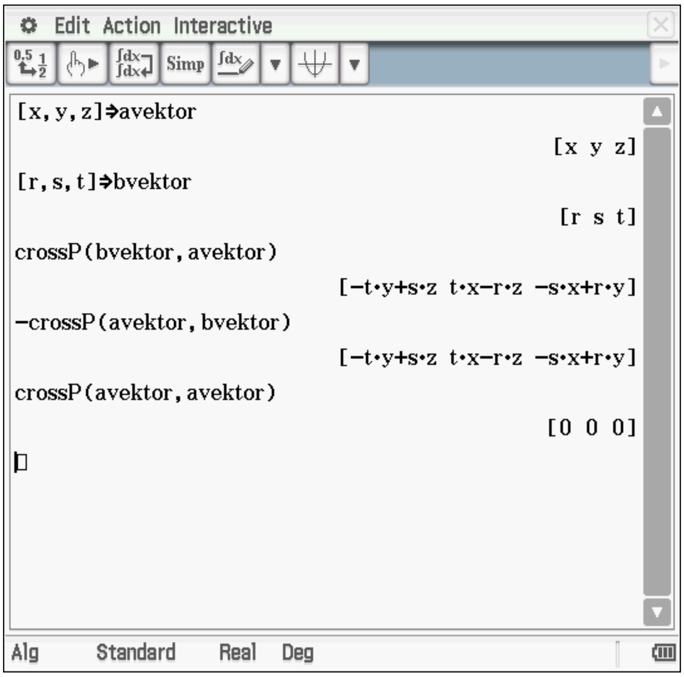
Løsning.



Volumet er 23 volumenheter.

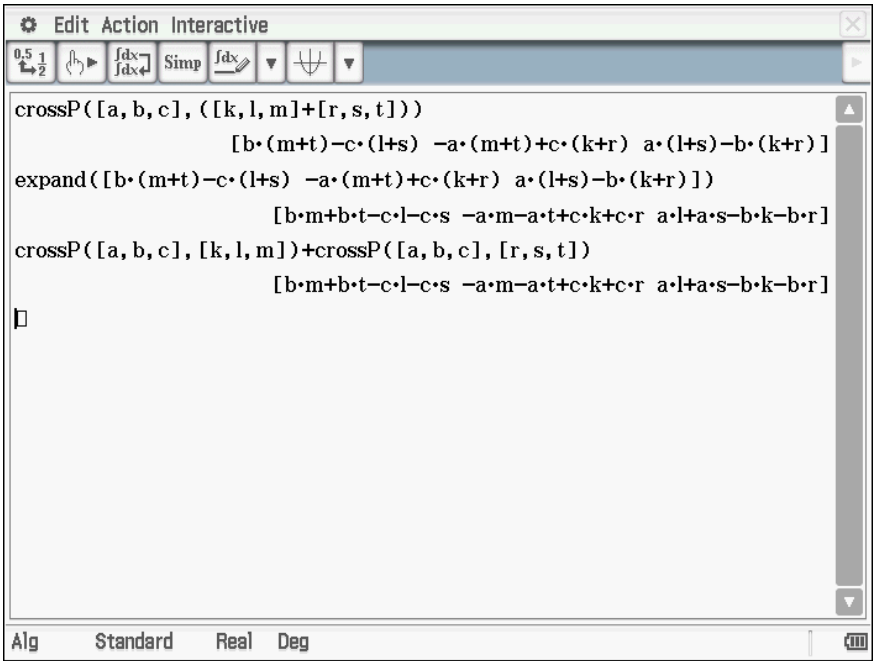
9.11 Egenskaper ved kryssproduktet

På skjermbildet nedenfor ser vi hvordan vi ved hjelp av CP400 kan vise at kryssproduktet er såkalt antikommutativt siden $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$. Vi har også anvendt CP400 til å vise at kryssproduktet er såkalt selvannihilerende, ettersom $\vec{a}\times\vec{a}=[0,0,0]$.



 Vis at $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$. Det betyr at kryssproduktet følger den distributive lov.

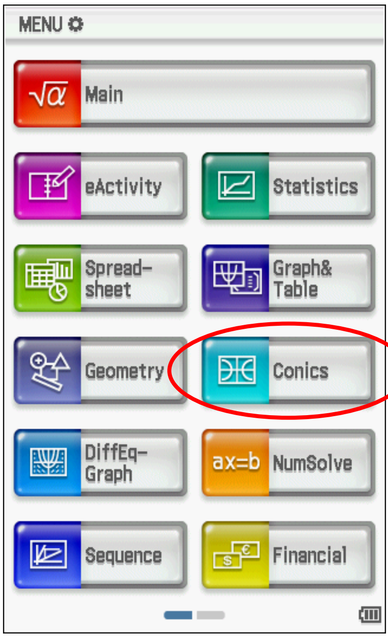
Løsning.



Vis deretter at $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})$.

10. Kjeglesnitt

10.1 Sirkelen



Kjeglesnitt er et fellesnavn på snittkurvene vi får når et plan skjærer en kjegle. De forskjellige kjeglesnittene fremkommer ved ulike vinkler mellom planet og kjegleflaten.

Matematisk blir et kjeglesnitt en kurve beskrevet av en andregradsligning med to variable.

Dersom vi anser sirkelen som et spesialtilfelle av ellipsen, finnes det fire ulike kjeglesnitt: sirkel, parabel, ellipse og hyperbel.

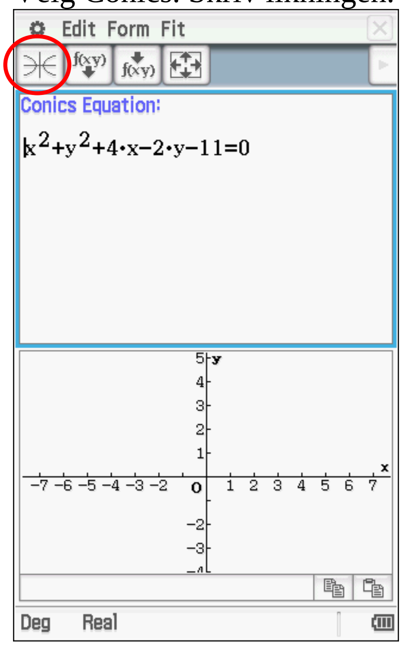
Kjeglesnitt kalles Conics i hovedmenyen.


a) Tegn sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$

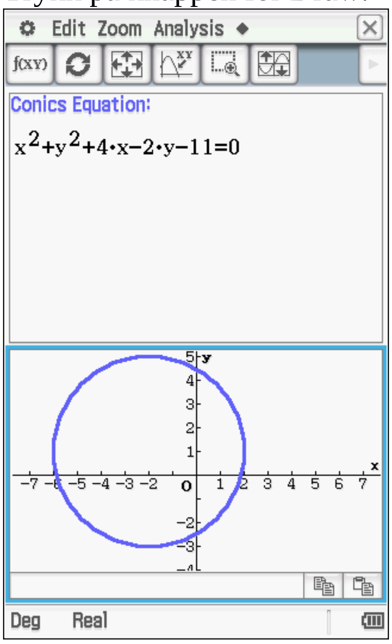
b) Bestem sentrum og radius.

a)

Velg Conics. Skriv likningen.



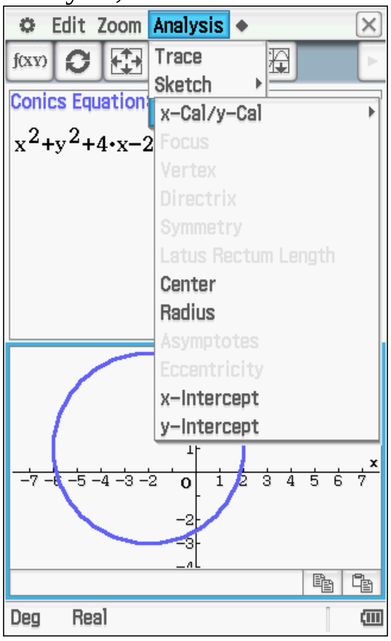
Trykk på knappen for Draw.



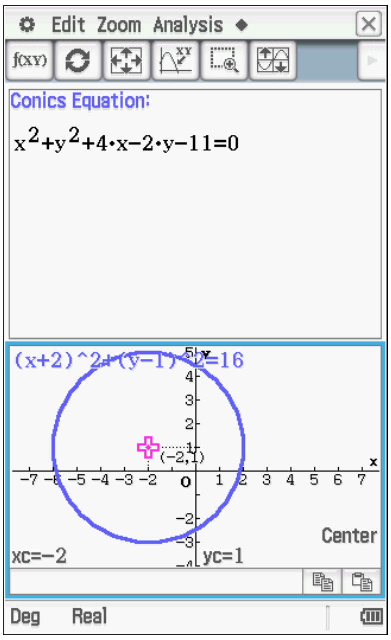
Det kan tenkes at vi må justere vinduet.

b)

Analysis, G-Solve.

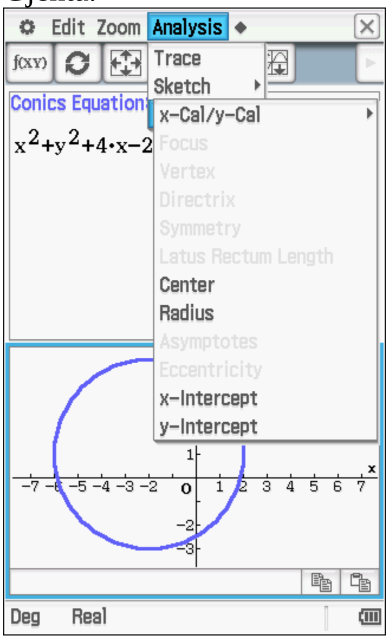


Center.

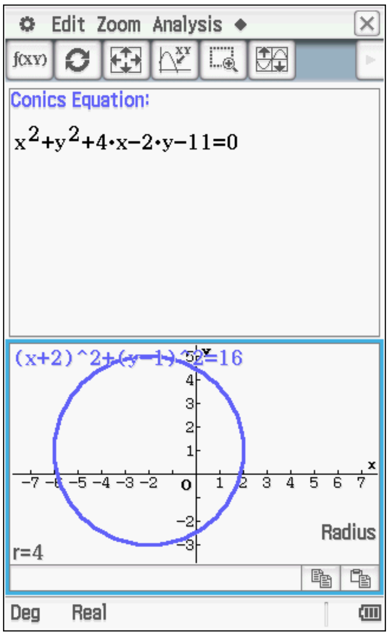


Sirkelen har sentrum i $(-2,1)$.

Gjenta.



Radius.



Sirkelen har radius 4.

Legg merke til at likningen for sirkelen er $(x+2)^2+(y-1)^2=4^2$

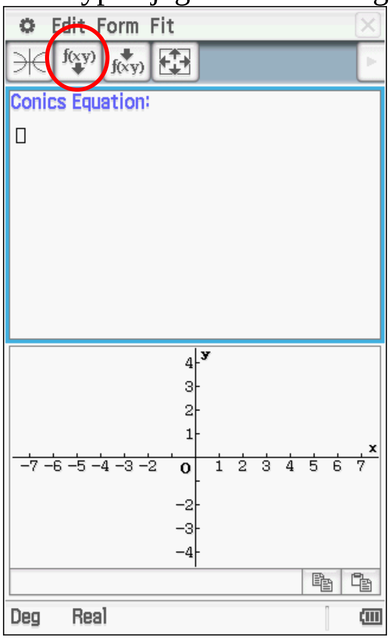
10.2 Parabel

a) Tegn parabelen gitt ved $y = x^2 - 2x - 1$

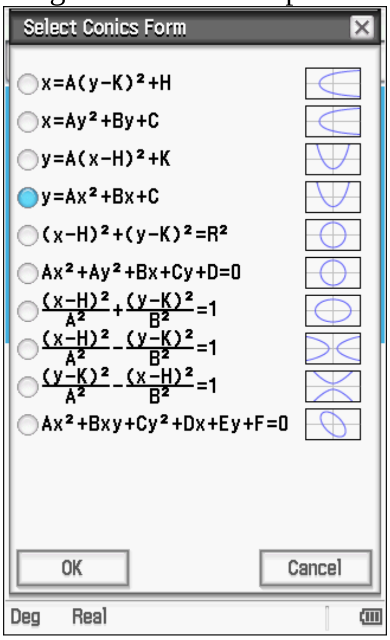
b) Bestem brennpunktet, symmetrilinjen, styrelinjen og toppunktet.

a)

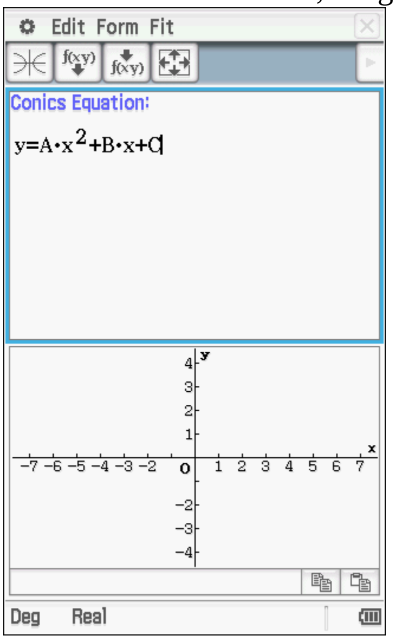
Hvis type kjeglesnitt ikke er gitt.



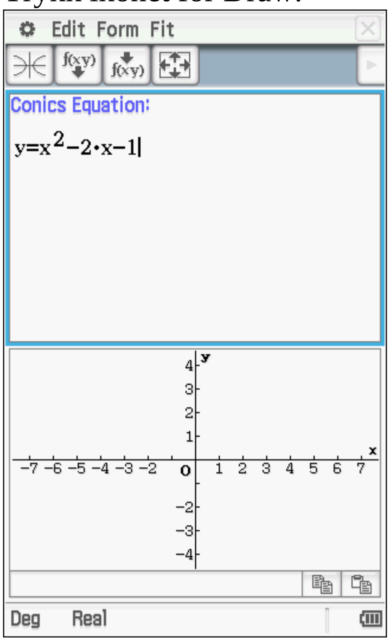
Valg. Vi forventer en parabel.

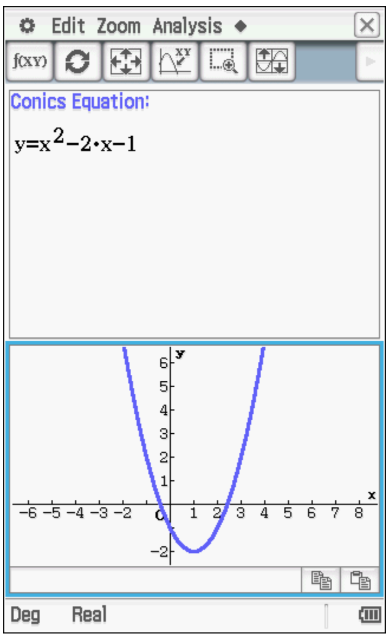


Skriv inn verdiene for A, B og C.

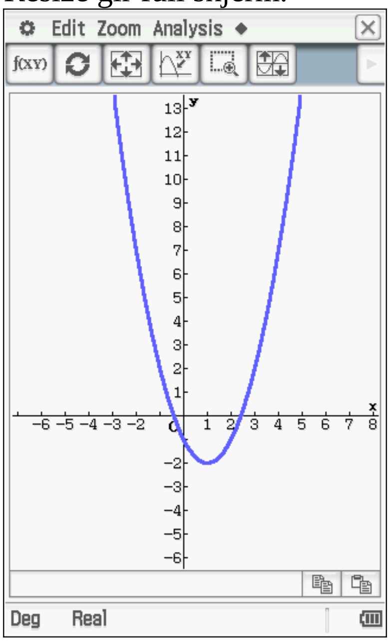


Trykk ikonet for Draw.



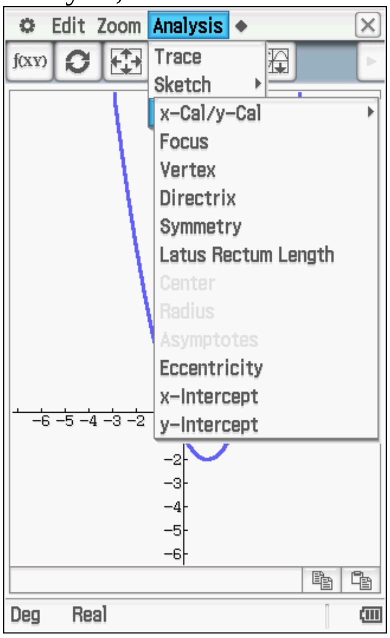


Resize gir full skjerm.

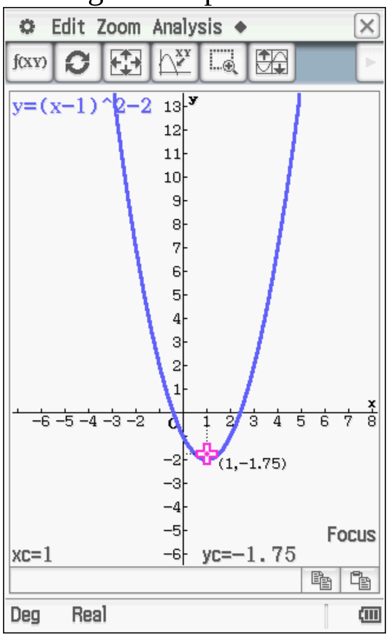


b)

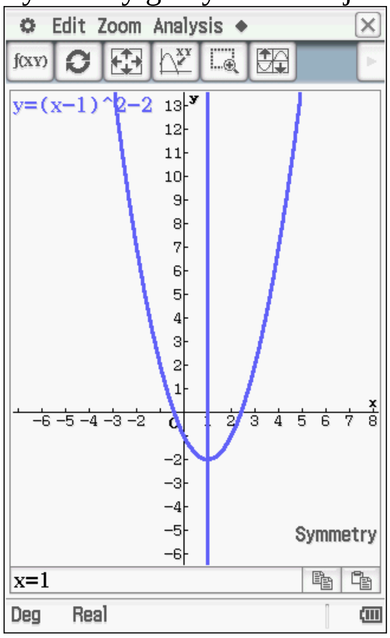
Analysis, G-Solve.



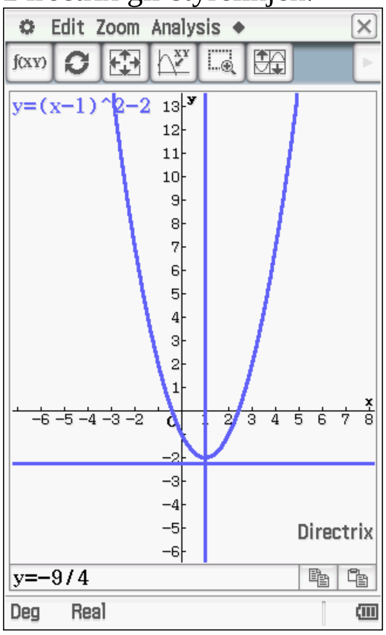
Focus gir brennpunktet.



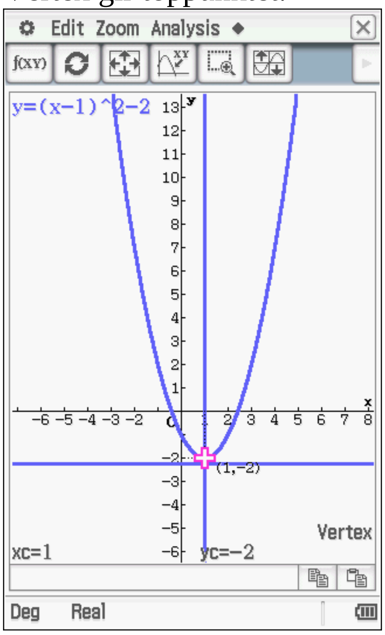
Symmetry gir symmetrilinjen.



Directrix gir styrelinjen.



Vertex gir toppunktet.



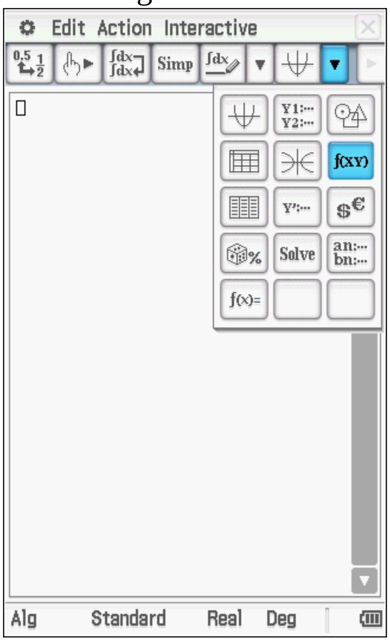
10.3 Ellipse


a) Tegn ellipsen gitt ved $\dfrac{(x+1)^2}{1}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

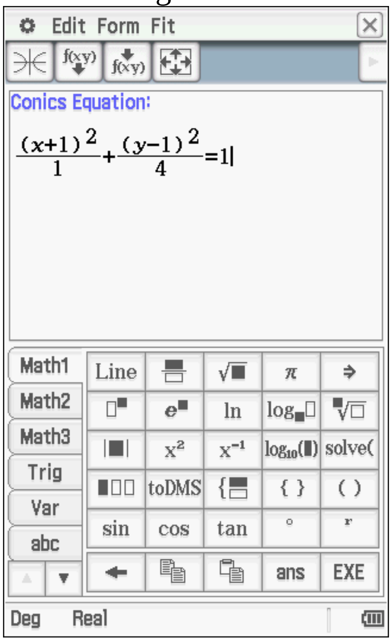
b) Bestem brennpunkt, skjæring med *x*-aksen og med *y*-aksen.

a)

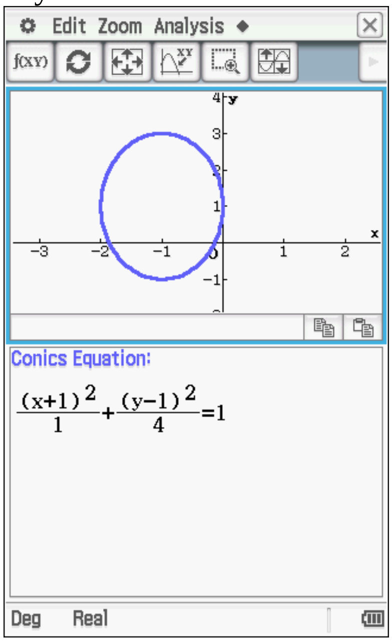
Vi kan velge Conics fra Main.



Skriv likningen.



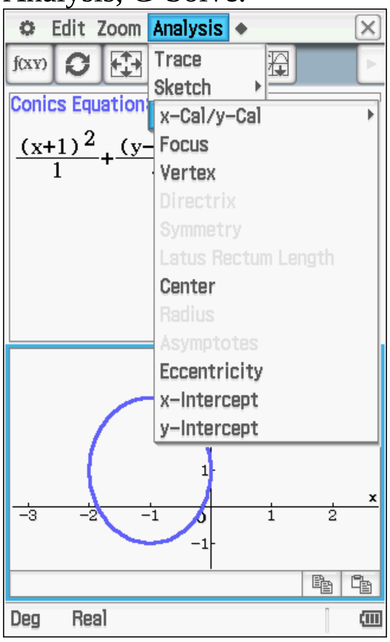
Trykk ikonet for Draw.



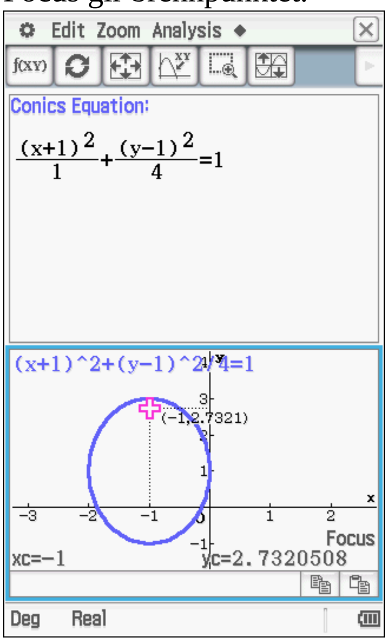
Formen på ellipsen avhenger av View Window.

b)

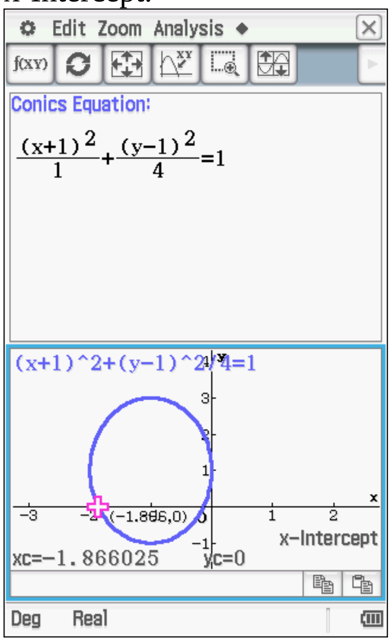
Analysis, G-Solve.



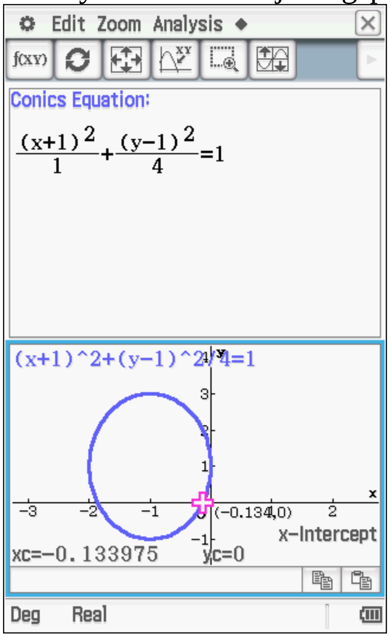
Focus gir brennpunktet.



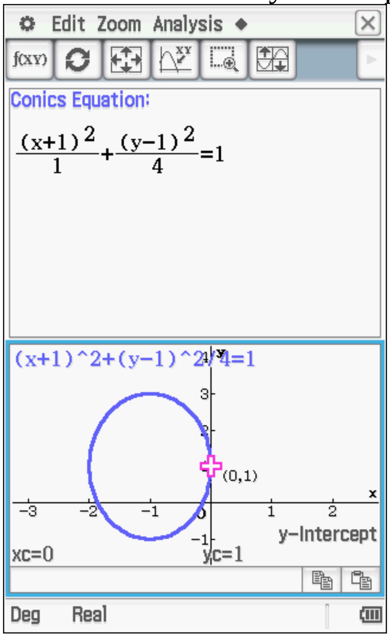
x-Intercept.



Pil høyre for neste skjæringspunkt.



y-Intercept.



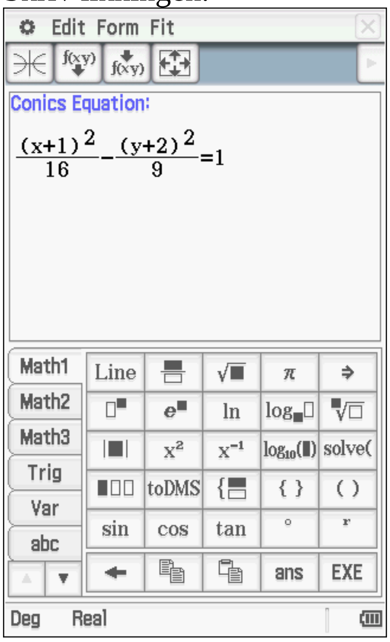
10.4 Hyperbel

a) Tegn hyperbelen gitt ved $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

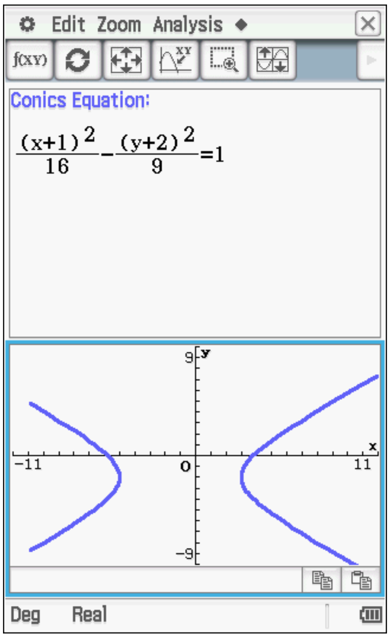
b) Bestem brennpunkt og stigningstallet til asymptotene.

a)

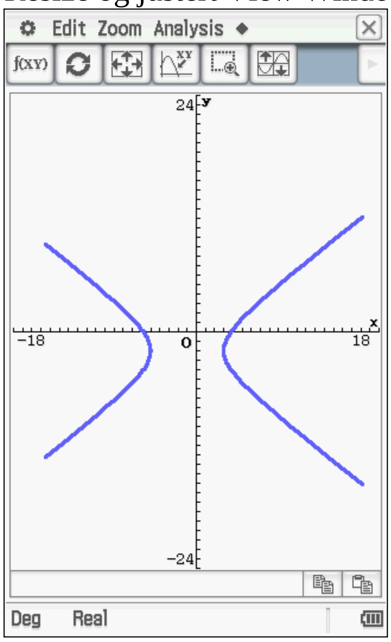
Skriv likningen.



Draw.

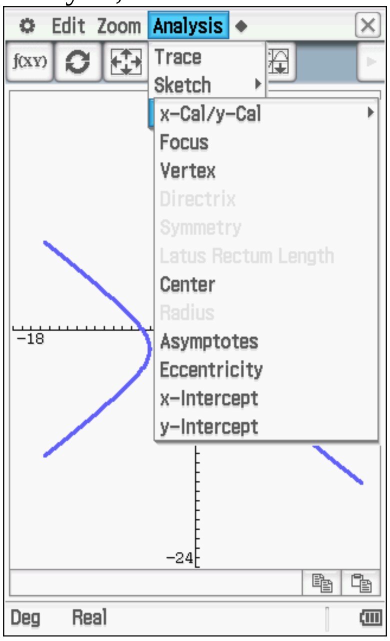


Resize og justert View Window.

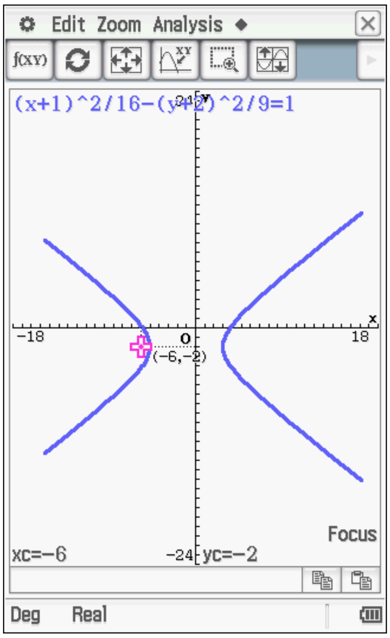


b)

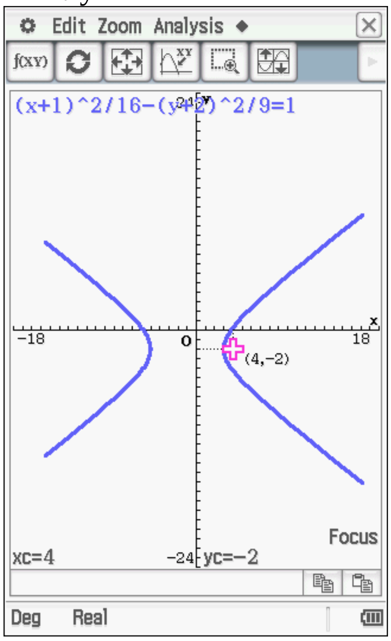
Analysis, G-Solve.



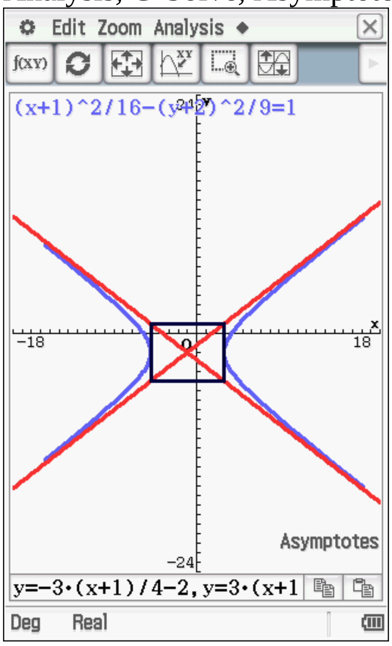
Focus.



Pil høyre.



Analysis, G-Solve, Asymptotes.



Asymptotene har stigningstall $\pm\frac{3}{4}$.

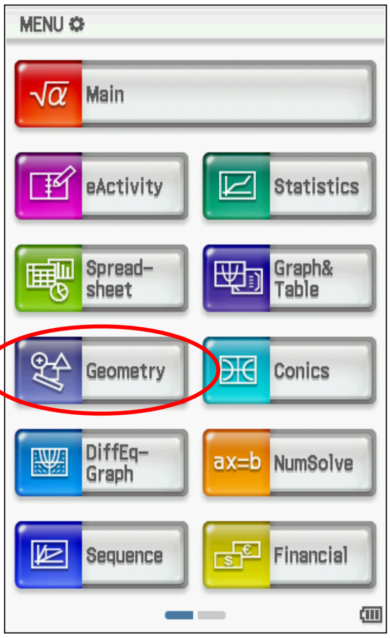
Prøv selv å finne koordinatene til andre viktige punkt på denne hyperbelen.

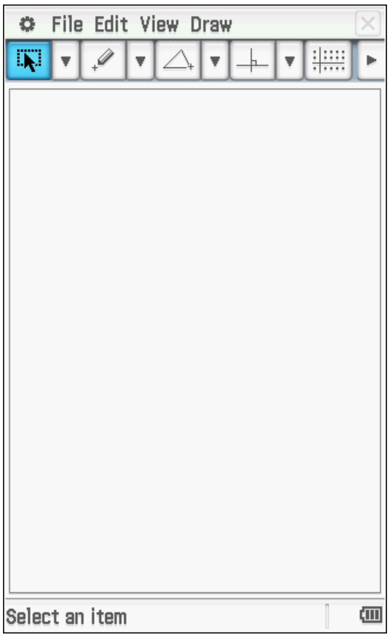
Kjeglesnitt kan også tegnes ved hjelp av polarkoordinater og parameterfunksjoner.

11. Geometri

- kommer fra det greske ordet geo- ”jord” og metron “mål.”

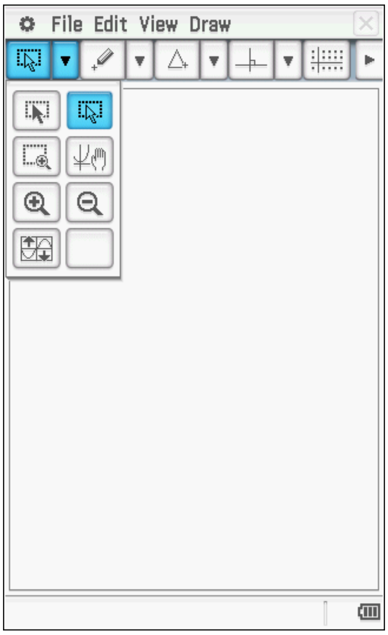
11.1 Menyene og knappefunksjonene

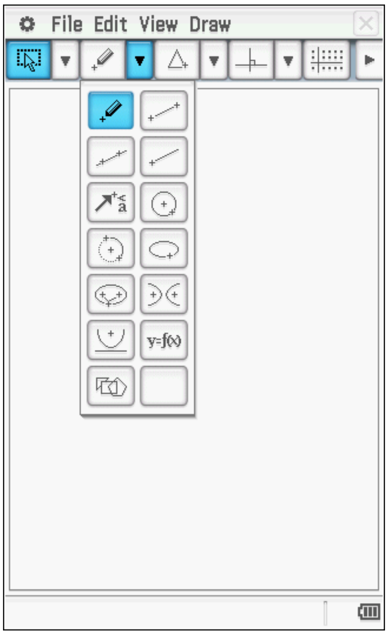


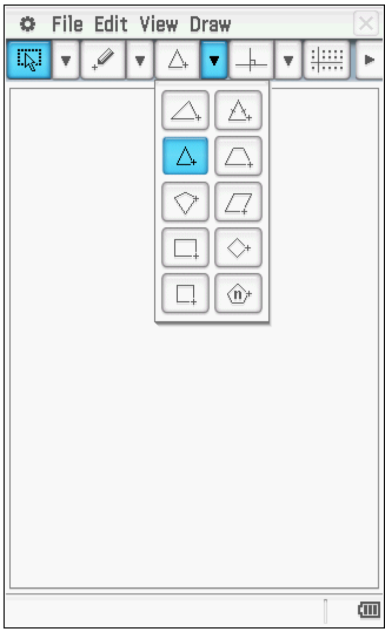


Når vi velger Geometry på hovedmenyen får vi en tom skjerm og en ny meny med knapper på toppen av skjermbildet. Denne menyen er for å tegne og omforme figurer. Aller øverst finner vi

File Edit View Draw

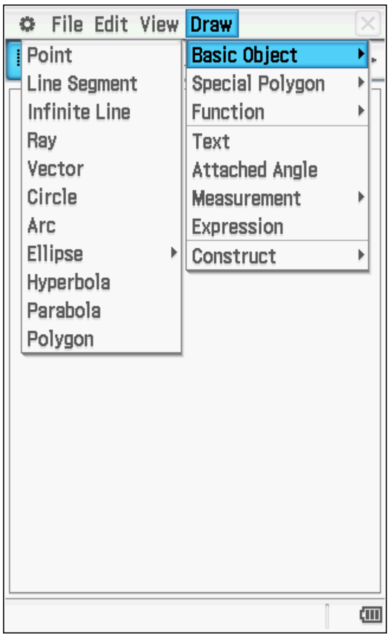


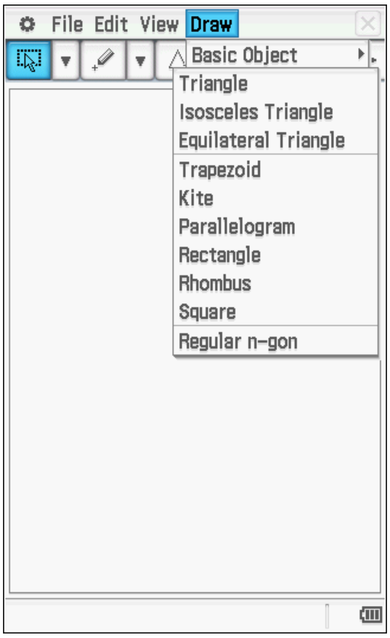




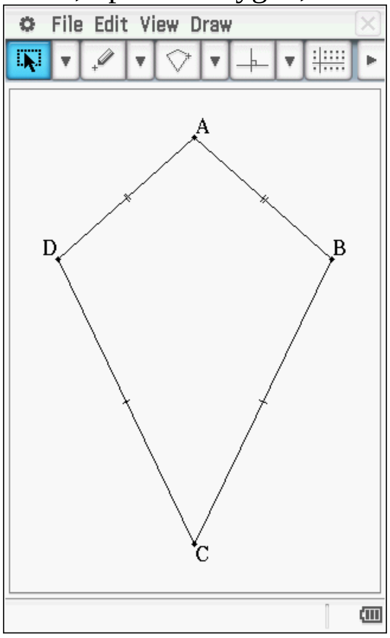
Vi skal studere en del av disse knappefunksjonene.

Vi kan bruke Draw for å konstruere figurer. Drawmenyen har undermenyer som vist til venstre, både for spesielle geometriske figurer og for grunnleggende konstruksjoner.

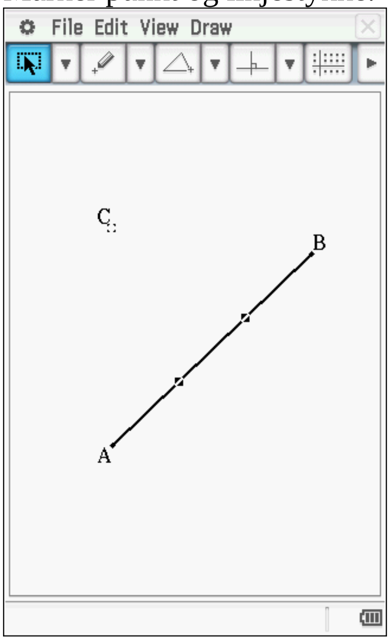




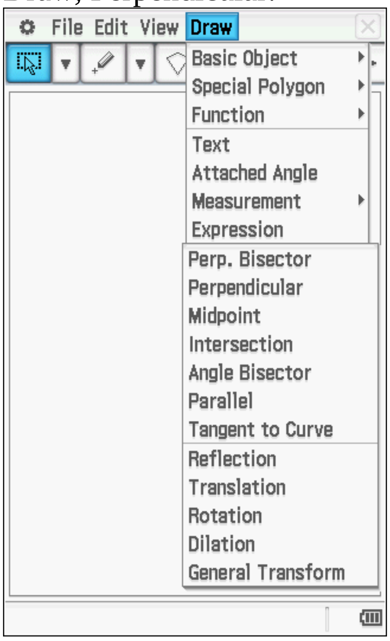
Draw, Special Polygon, Kite



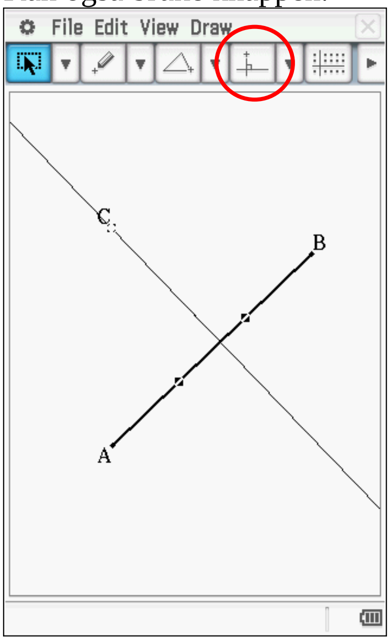
Linjestykke og punkt.
Marker punkt og linjestykke.



Draw, Perpendicular.



Kan også bruke knappen.

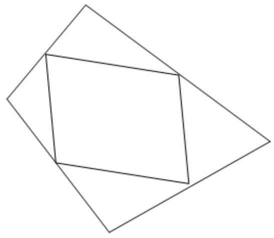


Legg merke til at knappefunksjonen endrer seg som følge av valg vi gjør i Draw.

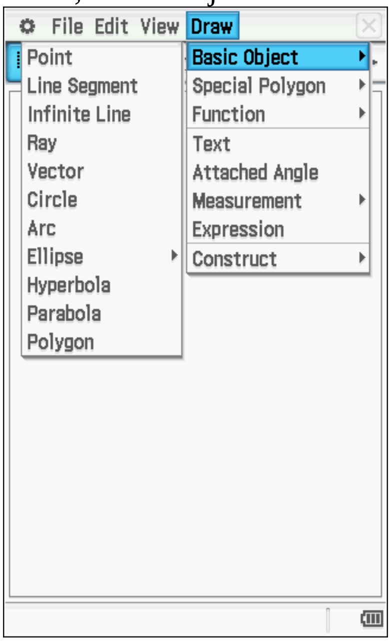
Geometry er en omfattende applikasjon med svært mange muligheter, og det kan av og til hende at vi blir litt usikker på hvilken funksjon vi skal velge eller hvilken knapp vi skal trykke på.

11.2 Firkant i firkant

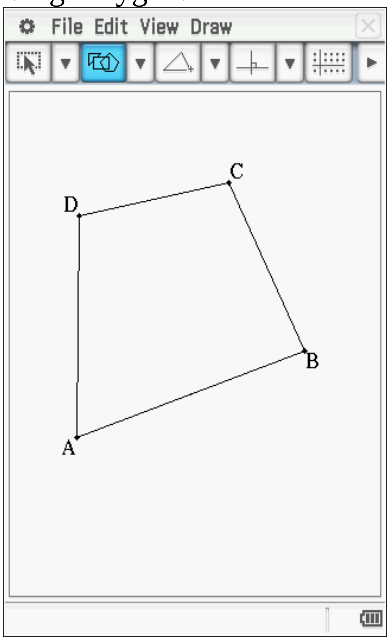
La oss se på en vilkårlig firkant. Ved å forbinde midtpunktene til de fire sidene får vi en ny firkant. Hva kan vi si om denne nye firkanten?



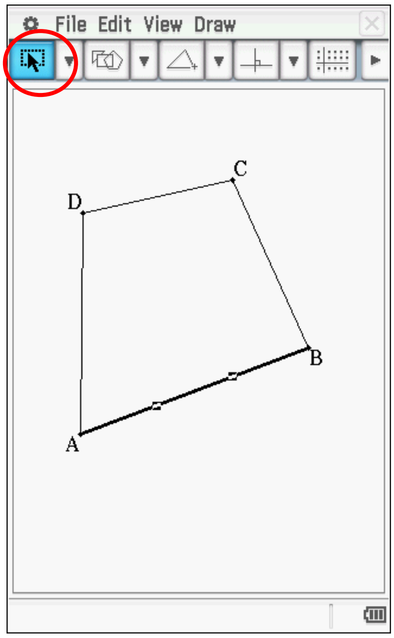
Draw, Basic Object



Velg Polygon.

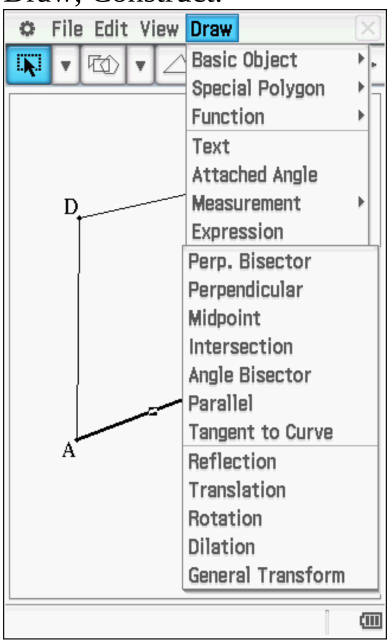


Marker AB.

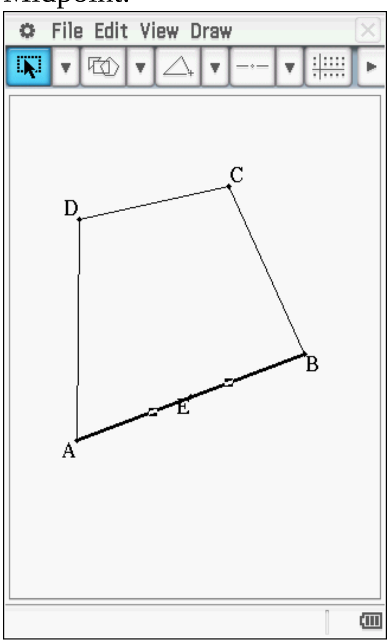


Mangekanten tegnes etter hvert som vi markerer punktene.

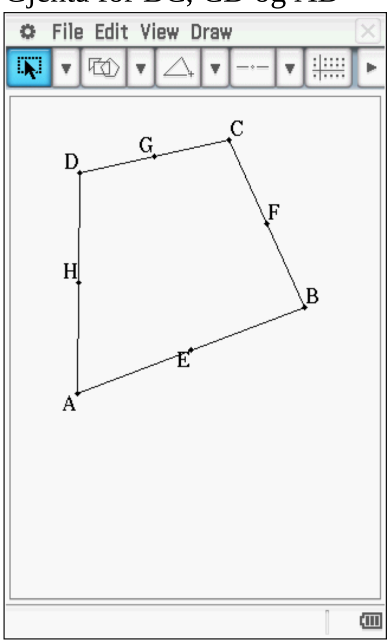
Draw, Construct.



Midpoint.

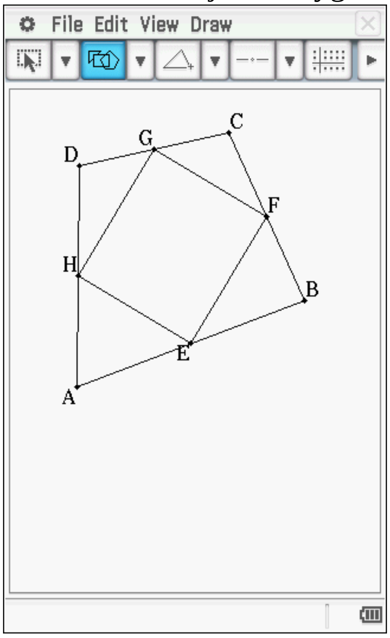


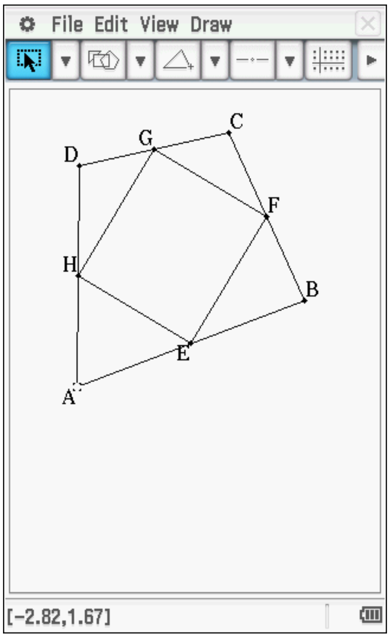
Gjenta for BC, CD og AD

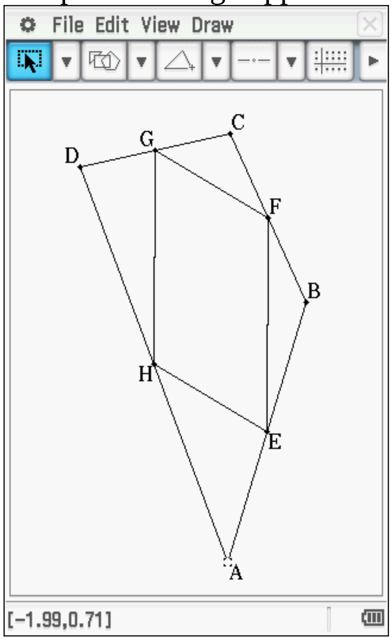


Med geometriapplikasjonen kan vi nå eksperimentere.

Draw, Basic Object, Polygon. Marker A. Pek på A. Dra og slipp.





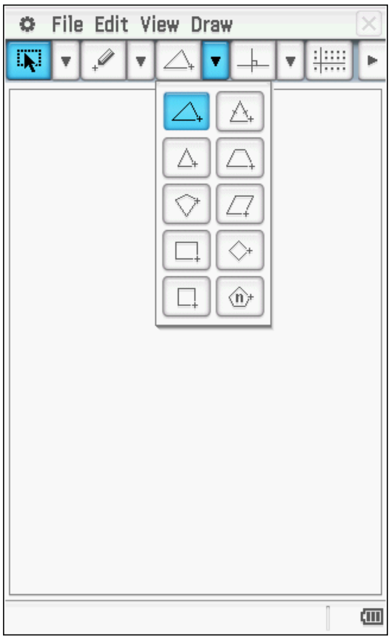


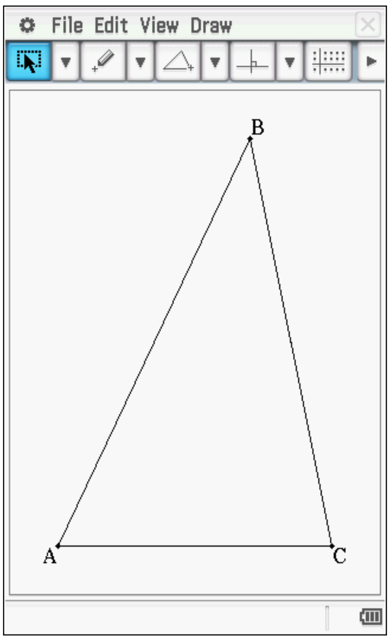
Vi kan utforske den innskrevne firkanten. Utforskingen leder oss til antagelsen om at figuren er et parallellogram. Vi viser ikke et formelt bevis her.

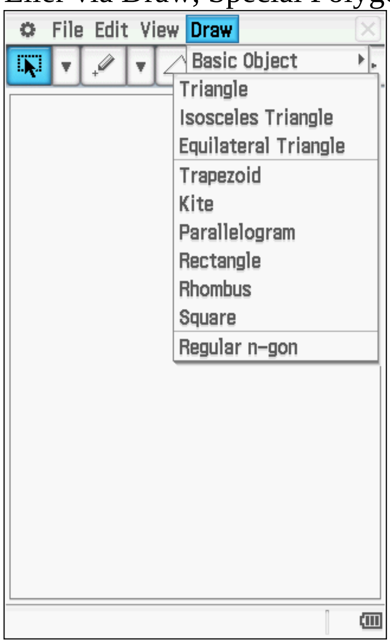
11.3 Trekanters egenskaper

Tegn en vilkårlig trekant og konstruer trekantens medianer.

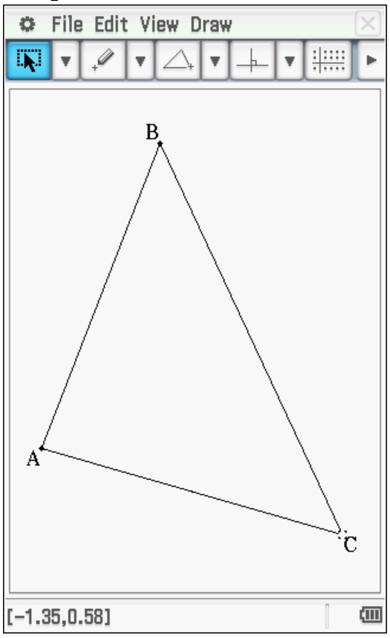
Direkte. Eller via Draw, Special Polygon.



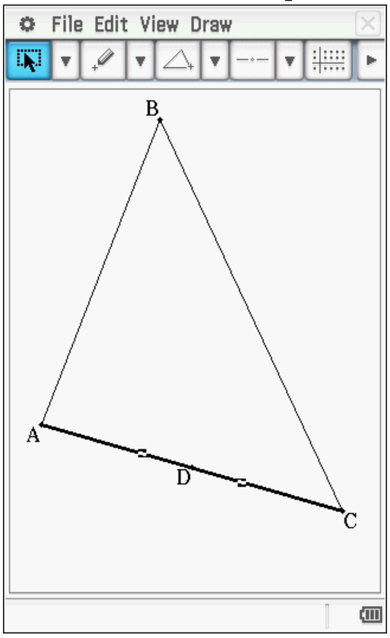




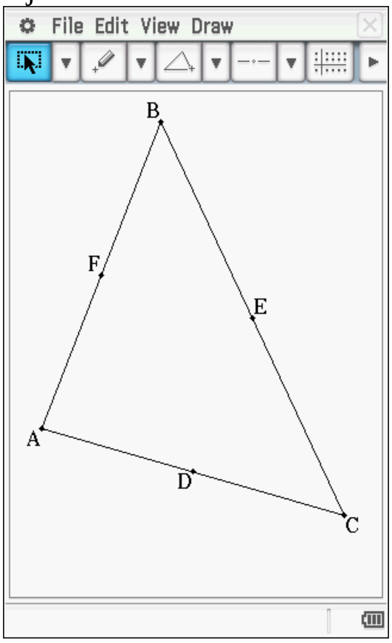
Øv på å endre formen.



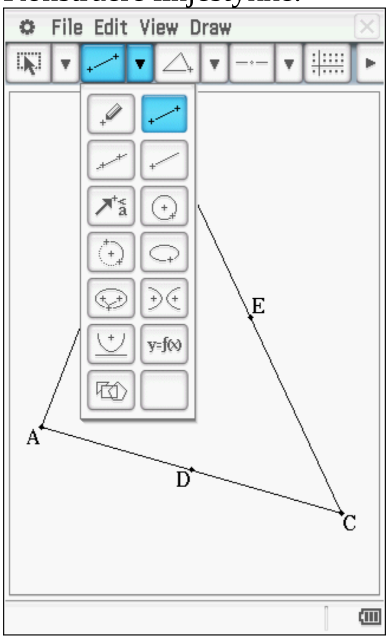
Draw, Construct, Midpoint.



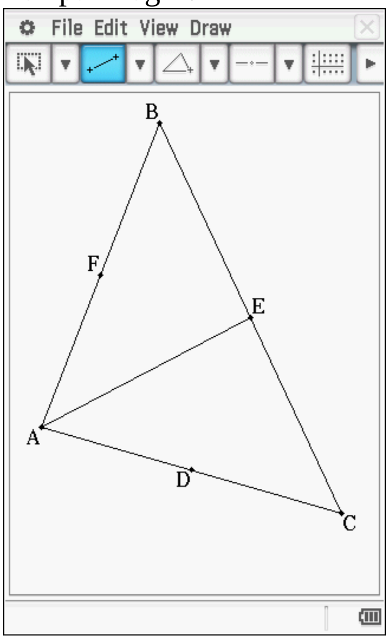
Gjenta for de andre sidene.



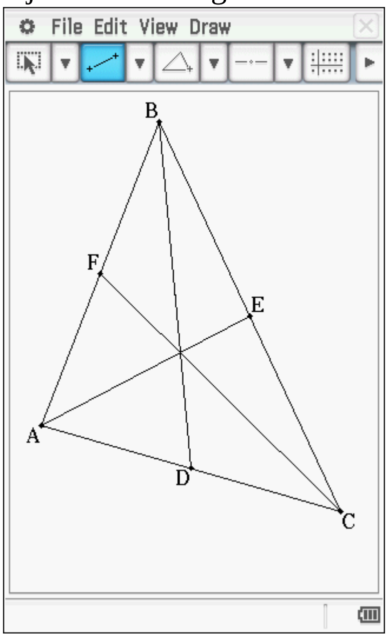
Konstruere linjestykke.



Pek på A og E.



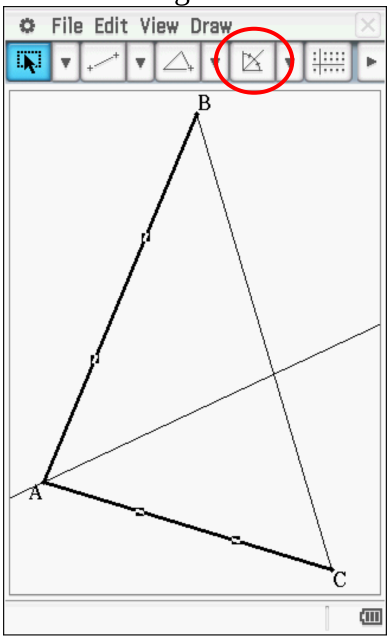
Gjenta for BD og CF.



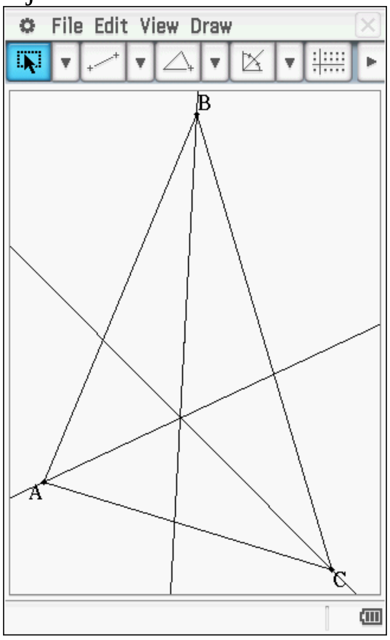
Figuren viser at de tre medianene skjærer hverandre i ett punkt. Manipuler med trekanten og undersøk om det gjelder i flere tilfeller. Matematisk bevis?

Tegn en vilkårlig trekant og konstruer halveringslinjene for vinklene i trekanten.

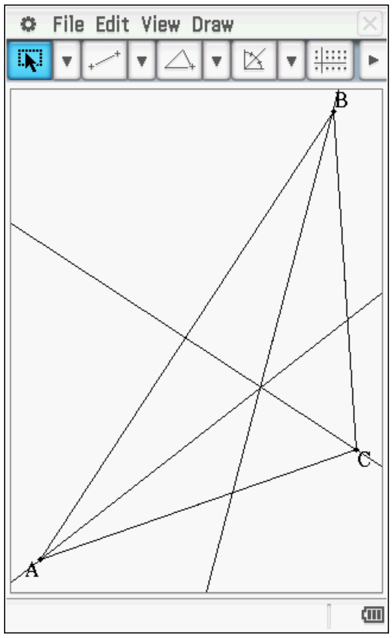
Marker AC og AB.



Gjenta for de to andre vinklene.



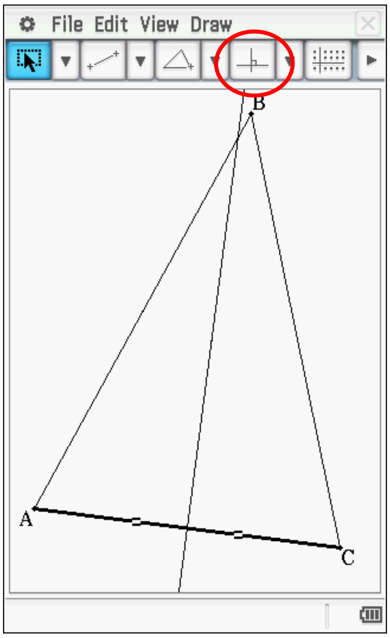
Endre formen til trekanten.



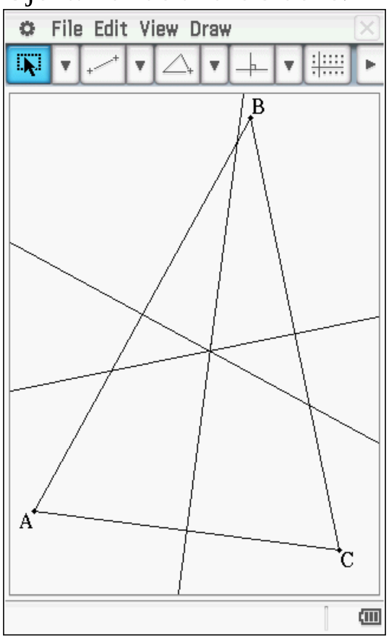
Figuren viser at de tre halveringslinjene skjærer hverandre i ett punkt. Manipuler med trekanten og undersøk om det gjelder i flere tilfeller. Matematisk bevis?

Tegn en vilkårlig trekant og konstruer midtnormalene til sidene i trekanten.

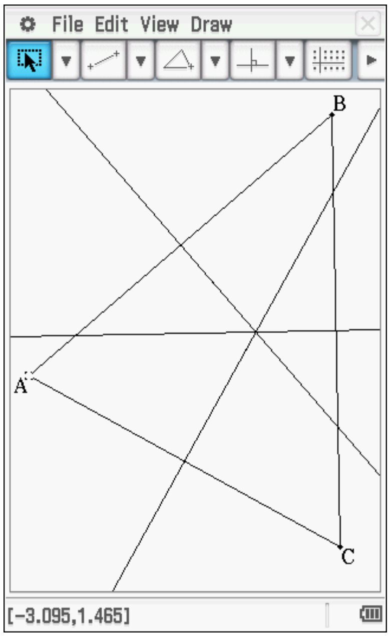
Marker AB. Midtnormal.



Gjenta for de andre sidene.



Utforsk ved å endre trekanten.

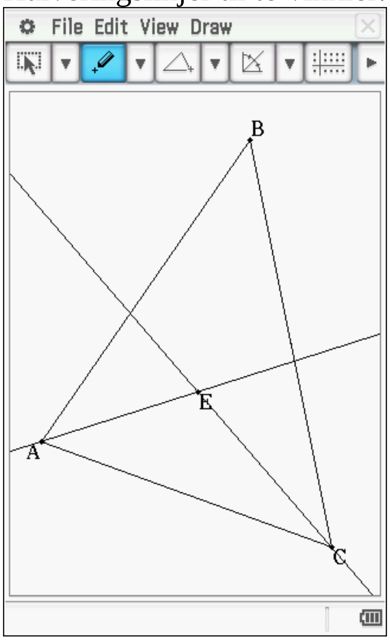


Figuren viser at de tre midtnormalene skjærer hverandre i ett punkt. Manipuler med trekanten og undersøk om det gjelder i flere tilfeller. Matematisk bevis?

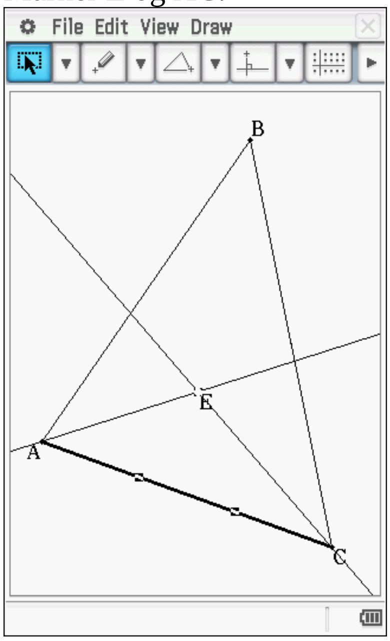
11.4 Innskrevet og omskrevet sirkel til en trekant

Tegn en vilkårlig trekant og konstruer den innskrevne sirkelen i trekanten.

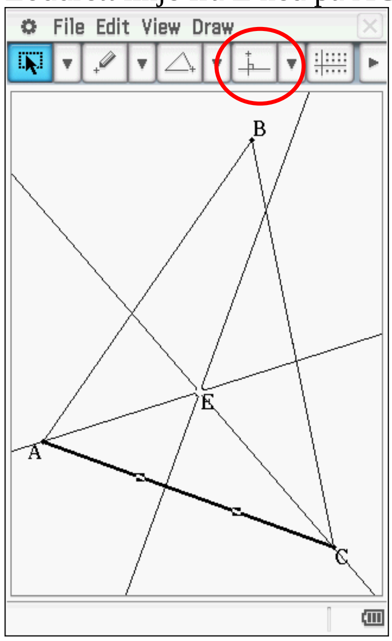
Halveringslinjer til to vinkler.



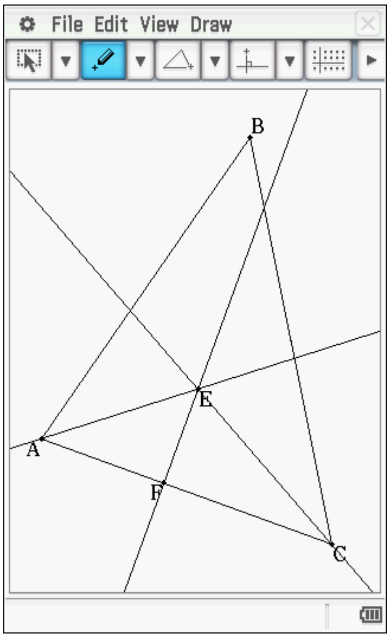
Marker E og AC.



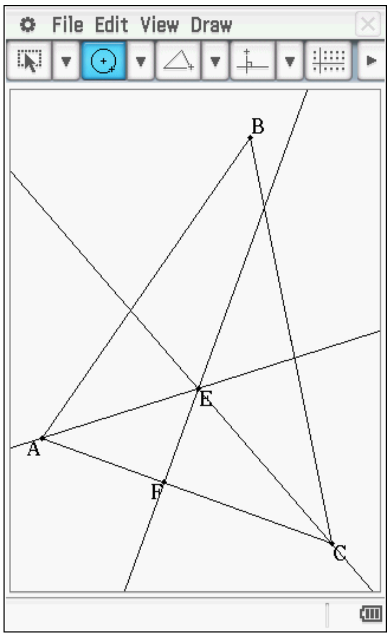
Loddrett linje fra E ned på AC.



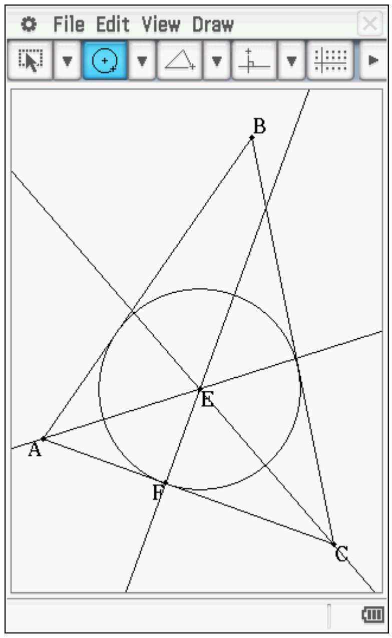
Pek på punkt F.



Velg.

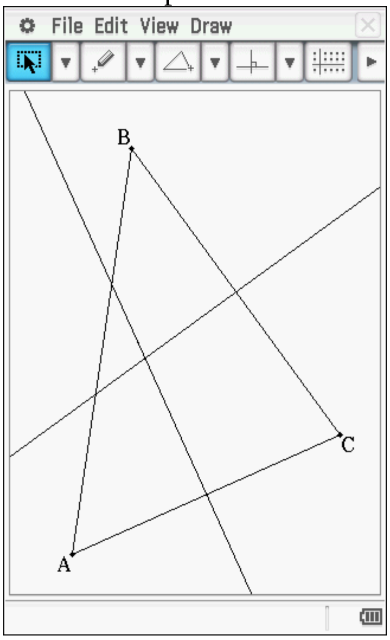


Pek på E og F.

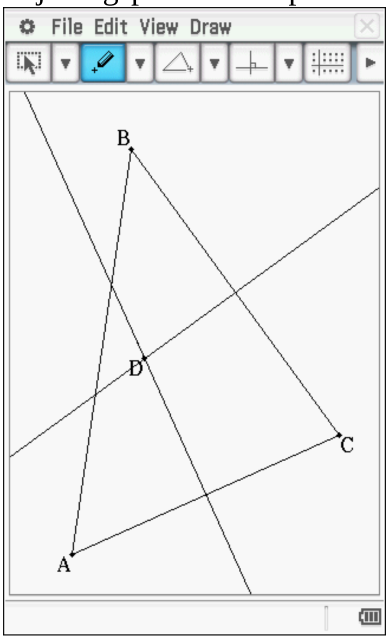


 Tegn en vilkårlig trekant og konstruer den omkrevne sirkelen til trekanten.

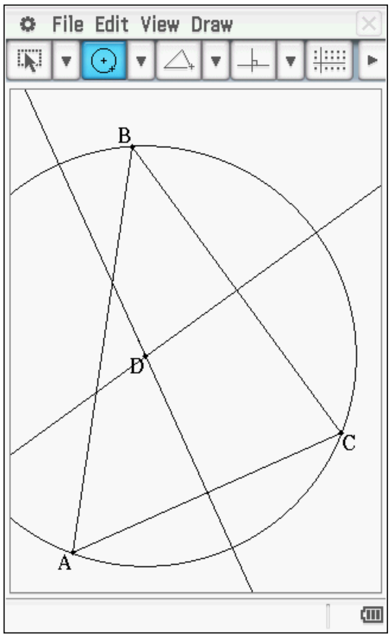
Midtnormal på sider.



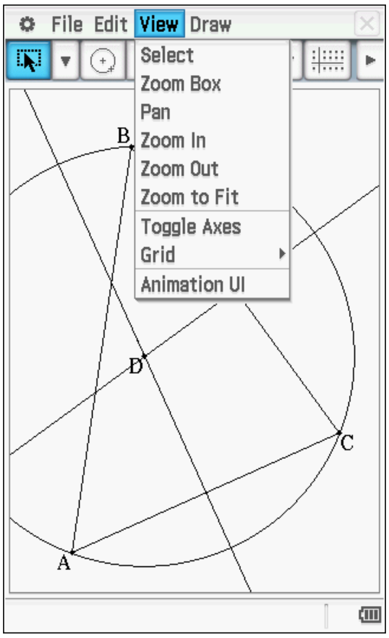
Skjæringspunkt ved å peke.



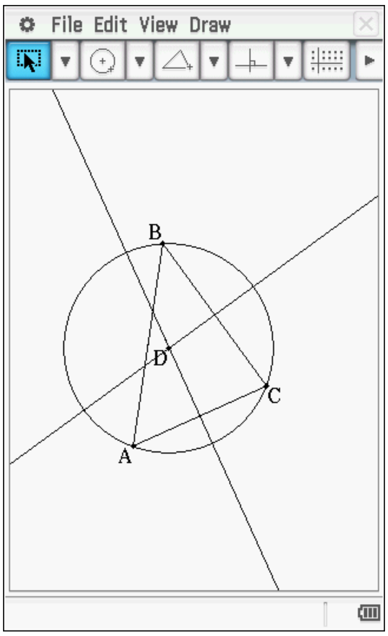
Omskrevet sirkel.



View.

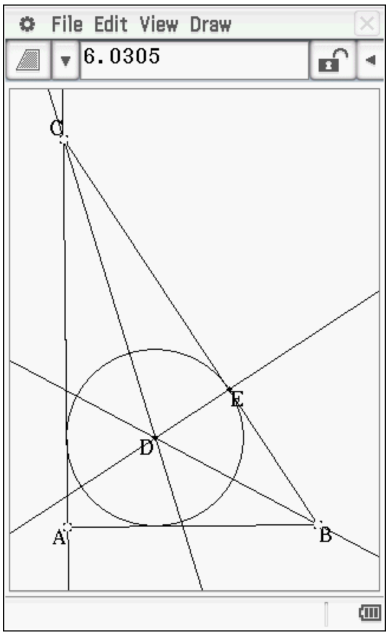


Zoom Out.

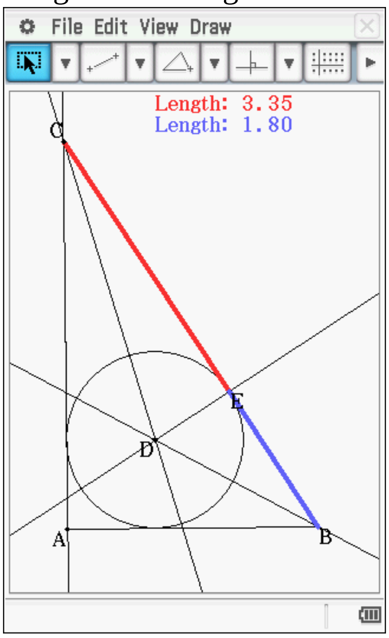


Tegn en rettvinklet trekant ABC og konstruer den innskrevne sirkelen i trekanten. Undersøk om det er en sammenheng mellom trekantens areal og lengden av de to linjestykkene som tangeringspunktet E deler hypotenusen i?

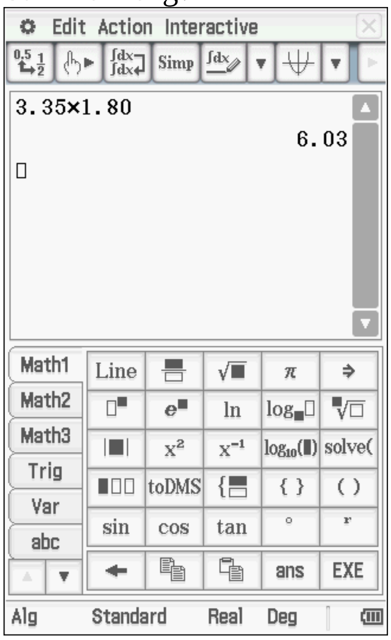
Areal til trekanten ABC.



Lengden til BE og CE.



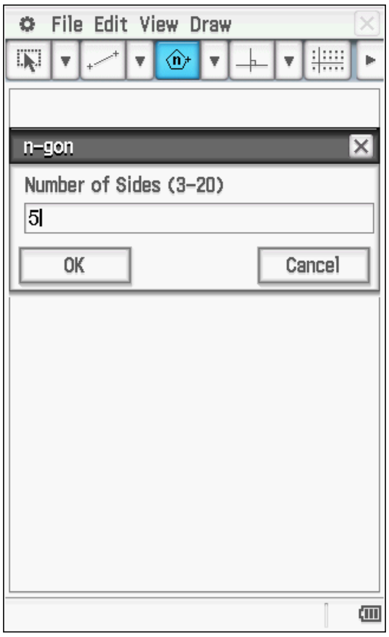
Sammenheng?

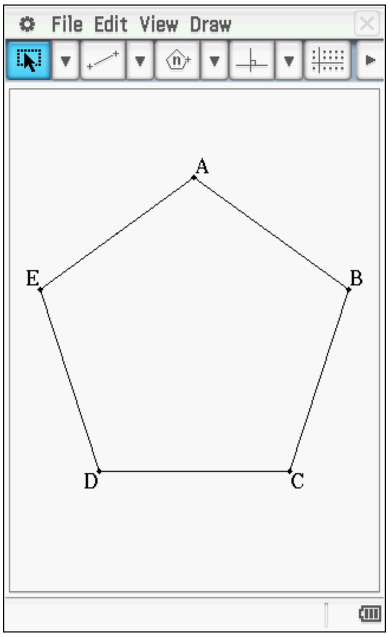


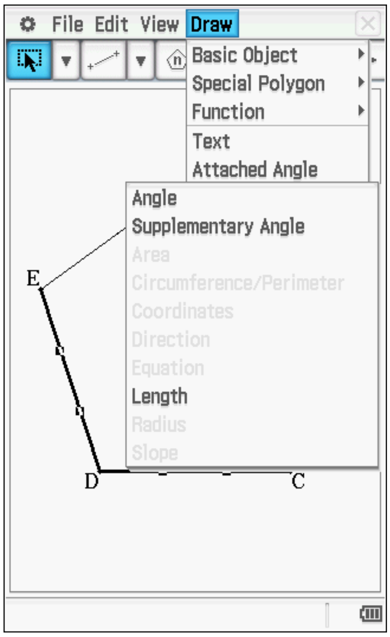
Fargene bestemmer vi i Edit og Style. Lengder bestemmer vi ved hjelp av Draw og Measurement.

11.5 Femkanten

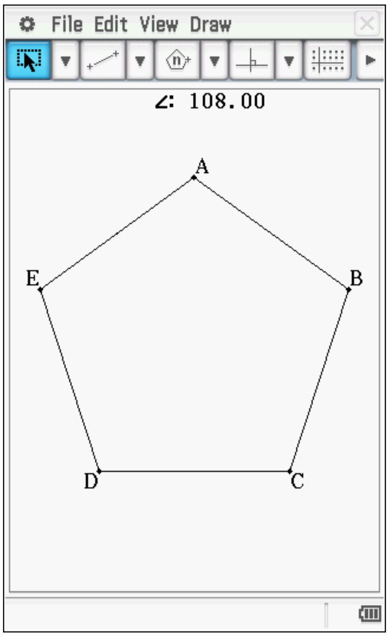
Tegn en regulær femkant. Hvor stor er vinkelen i en regulær femkant?
Mål lengden av en diagonal og lengden av en side i femkanten.
Regn ut forholdet mellom lengden av diagonalen og lengden av siden.

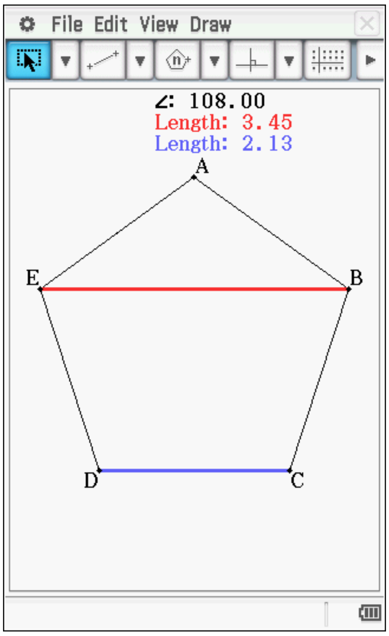


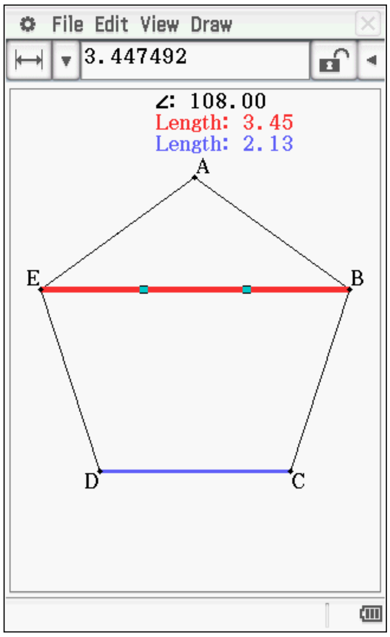


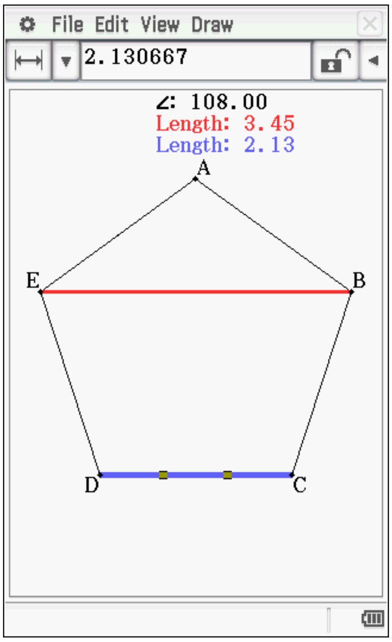


Pil mot høyre gir lengden med seks desimaler.

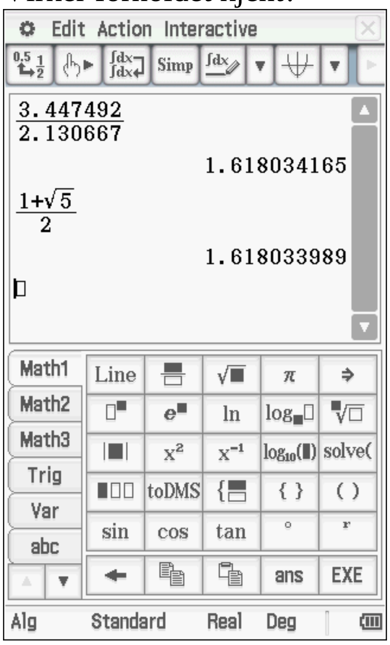




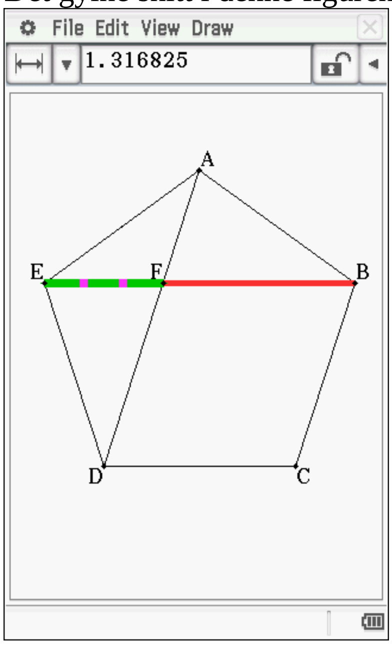




Virker forholdet kjent?

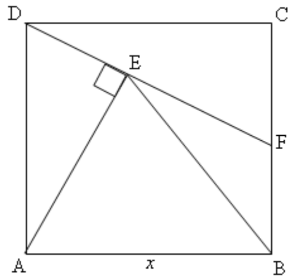


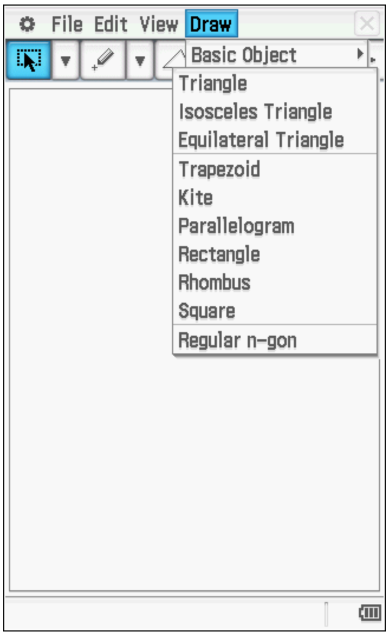
Det gylne snitt i denne figuren?



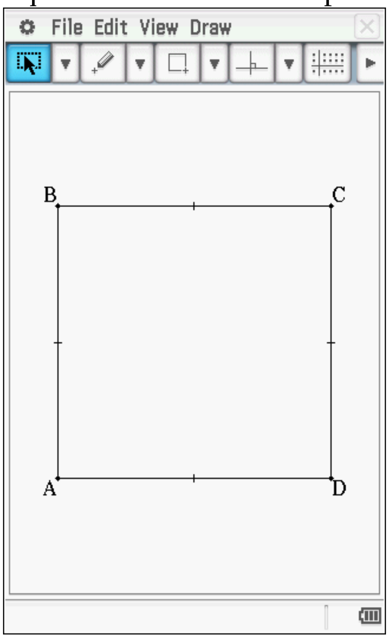
11.6 Utforskning av kvadratet

Lengden til sidene i et kvadrat ABCD er x. F er midtpunktet til BC, og $AE \perp DF$. Mål sidelengden i kvadratet og lengden til BE.

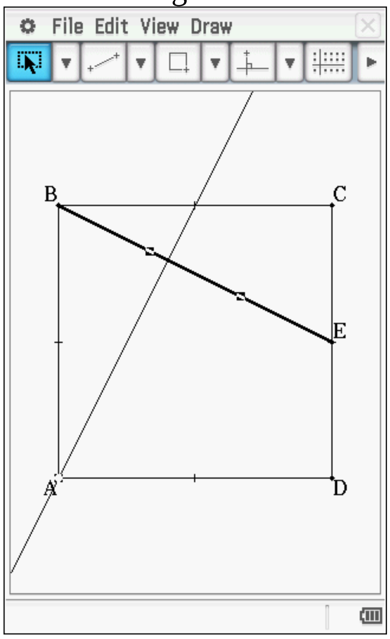




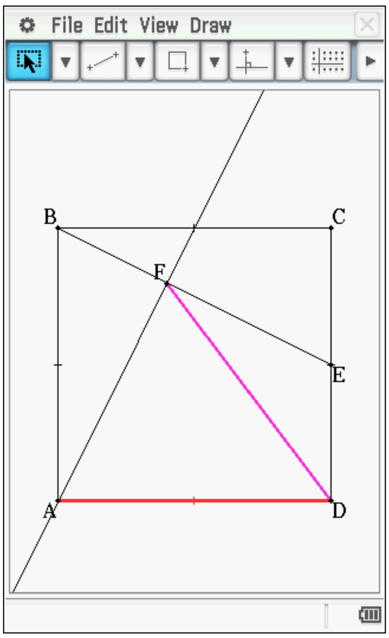
Square. Marker CD. Midpoint.



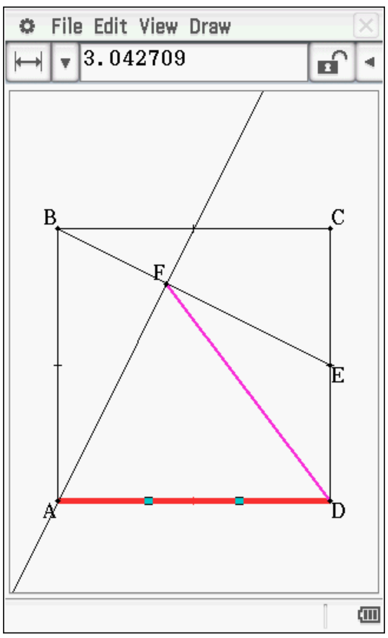
Marker BE og A. Normal fra A.



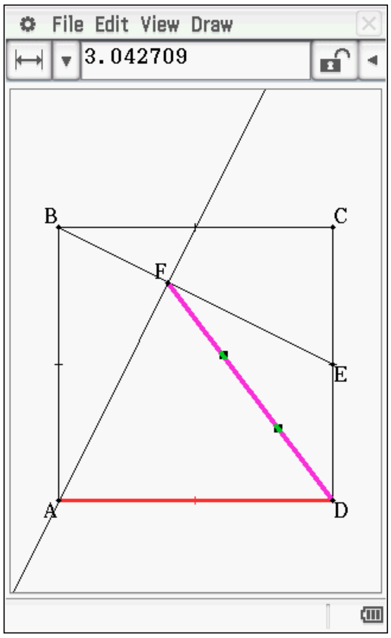
Pek på F. tegn linjestykket FD.



Lengden til AD.



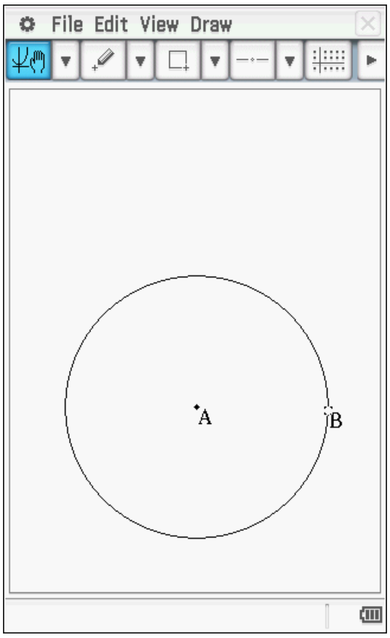
Lengden til FD.



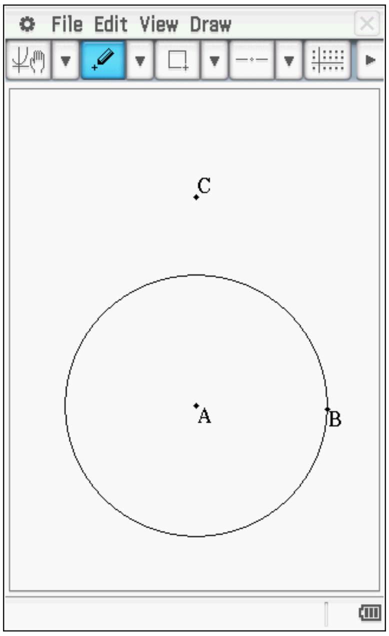
Hva ser vi? Endre kvadratet og undersøk om antagelsen gjelder. Utfør et matematisk bevis for sammenhengen vi ser her.

11.7 Konstruere en tangent fra et punkt til en sirkel

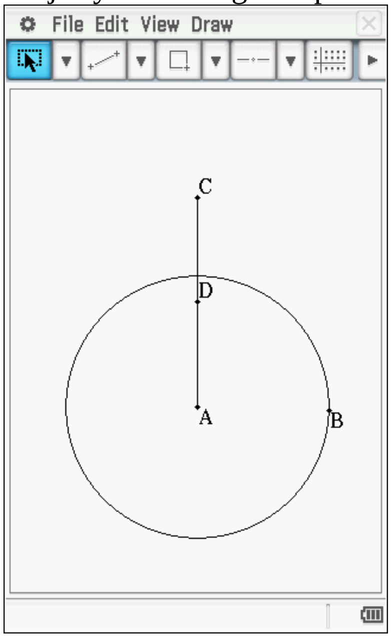
Sirkel.



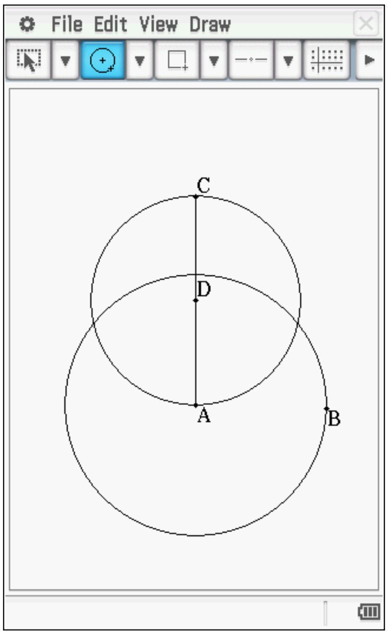
Punkt utenfor sirkelen.



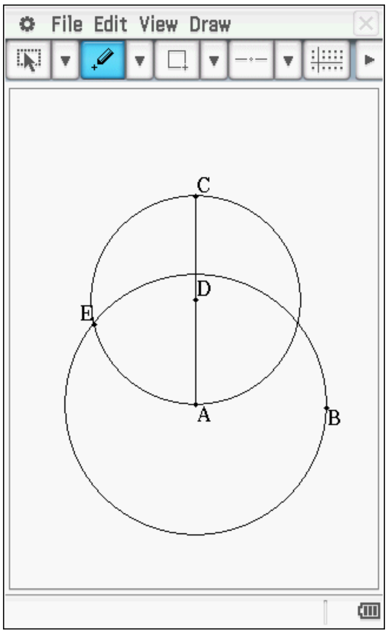
Linjestykke AC og midtpunkt.



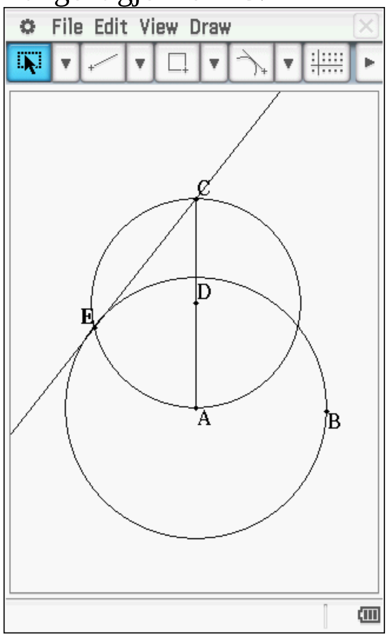
Sirkel med sentrum i D.



Punkt E.



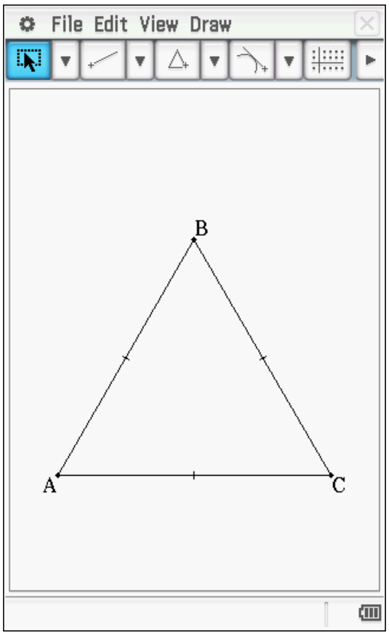
Tangent gjennom C.



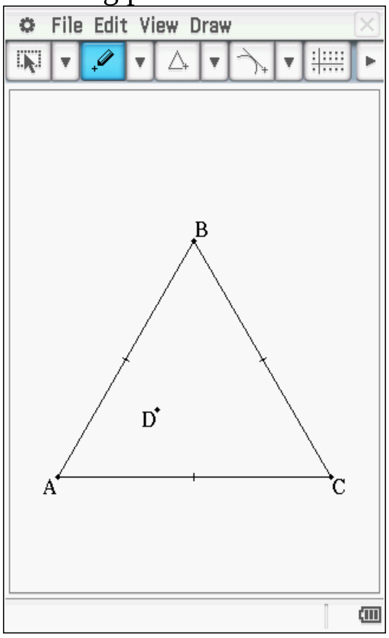
Begrunn konstruksjonen ovenfor.

11.8 Et fascinerende geometriske teorem

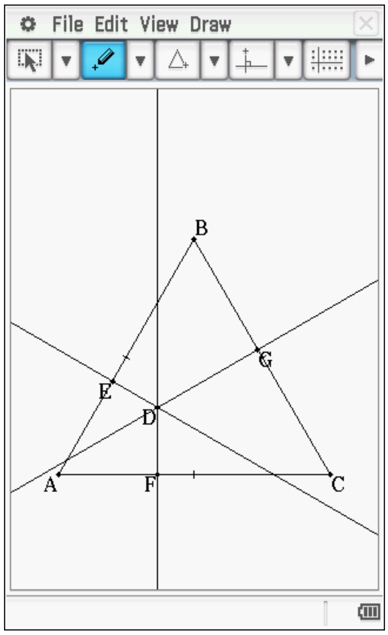
Likesidet trekant.



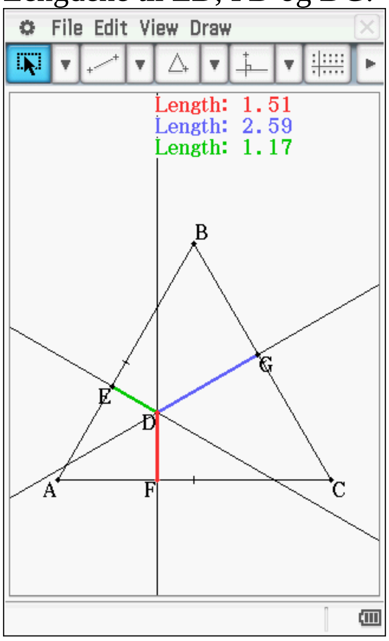
Vilkårlig punkt inne i trekanten.



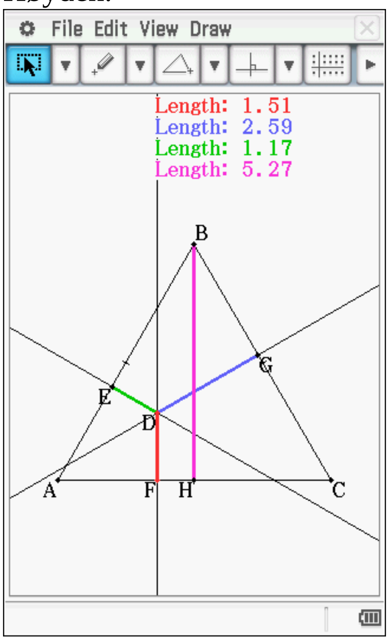
Avstander fra D til sidene.

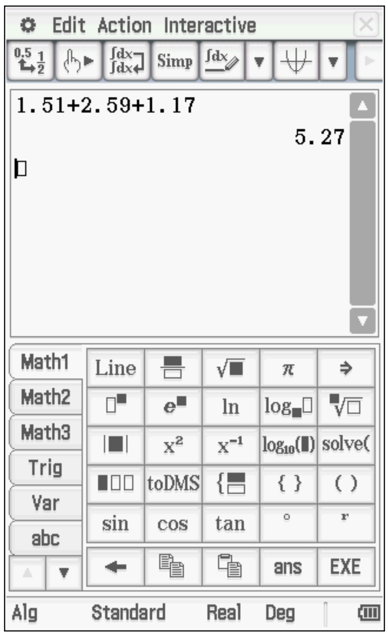


Lengdene til ED, FD og DG.



Høyden.



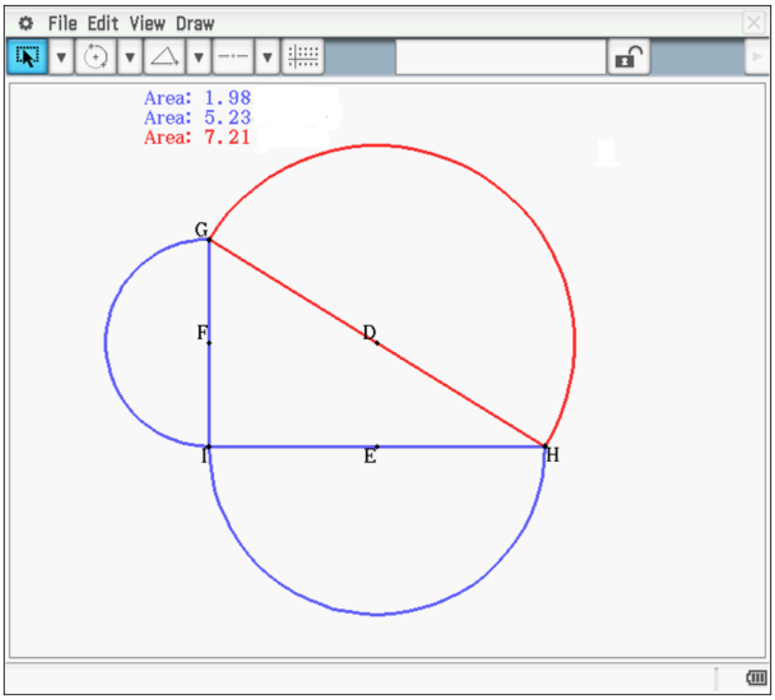


Hva ser det ut som? CP400 er et egnet hjelpemiddel til å danne hypoteser. Manipuler med trekanten og punktet inne i trekanten, og undersøk holdbarheten til Vivianis teorem nedenfor.

Summen av avstandene til de tre sidene i en likesidet trekant fra et punkt som ligger inne i trekanten eller på en side, er konstant og lik høyden til trekanten.

11.9 Pythagoras med halvsirkler

Hvorfor?



Forsøk med likesidete trekanter på katetene og hypotenusen.

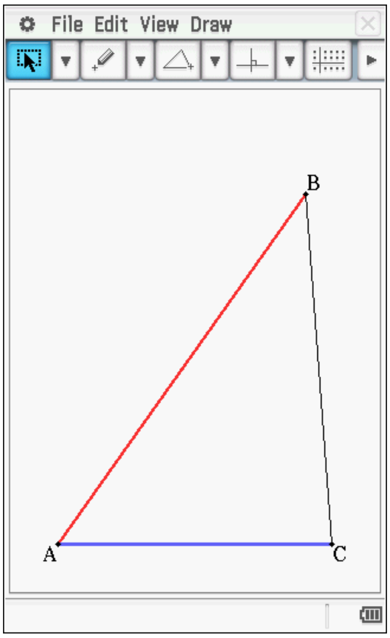
Hva med andre figurer som er ensformede?

11.10 Arealsetningen til en trekant

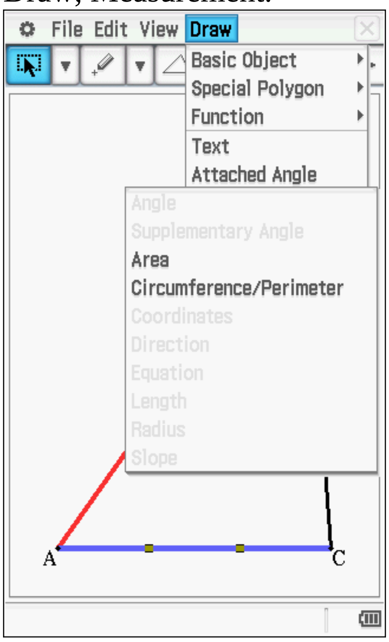
Tegn en vilkårlig trekant ABC. Mål lengden av to sider og mellomliggende vinkel.

Verifiser arealsetningen $A = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$.

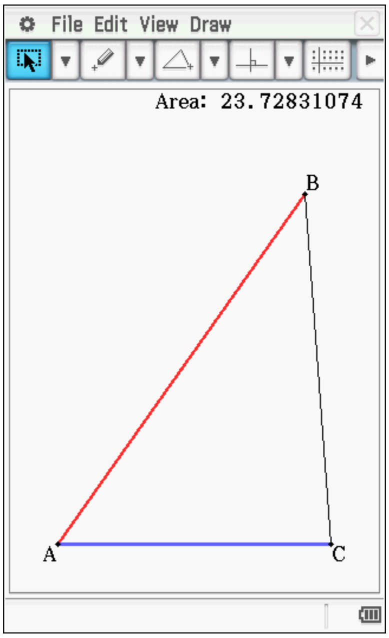
Konstruer trekanten.

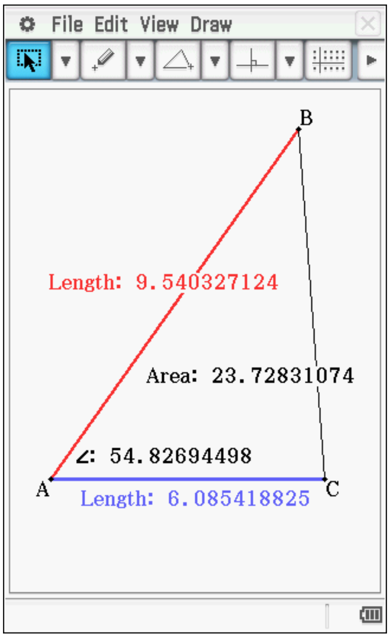


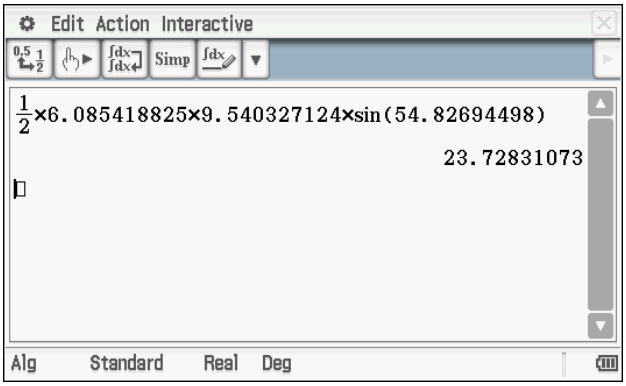
Draw, Measurement.



Area.

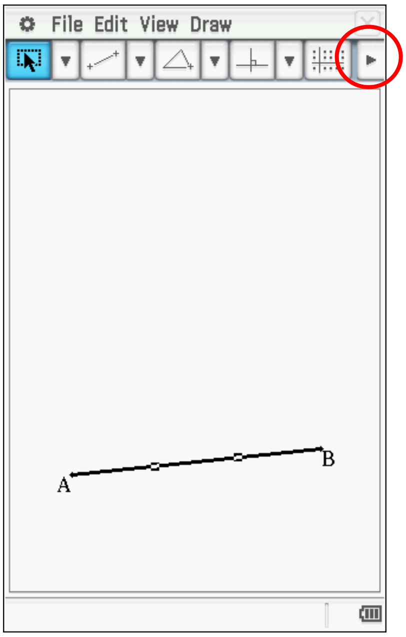


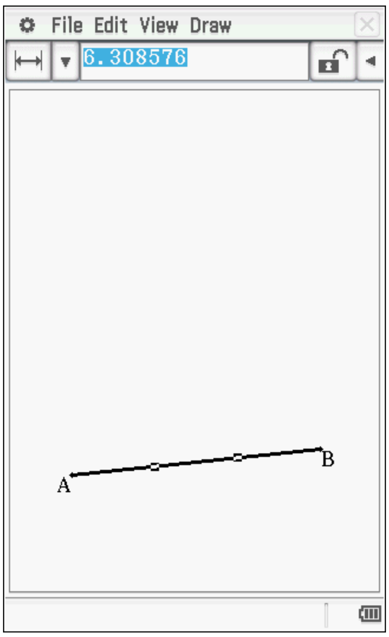


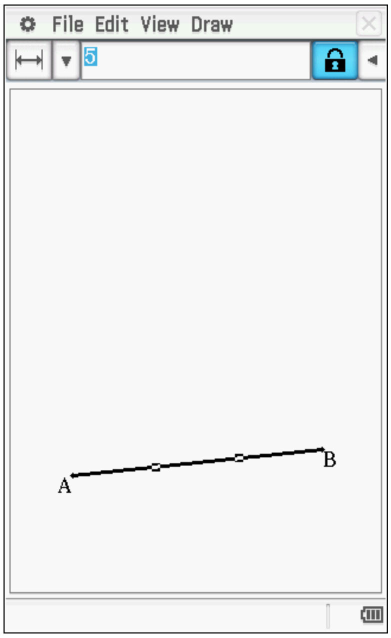


 Tegn en trekant ABC der AB = 5 cm, AC = 3 cm og $\angle A = 60^{\circ}$. Verifiser arealsetningen.

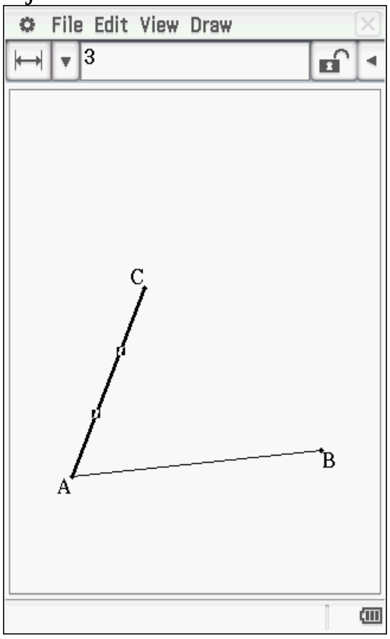
Skriv 5.



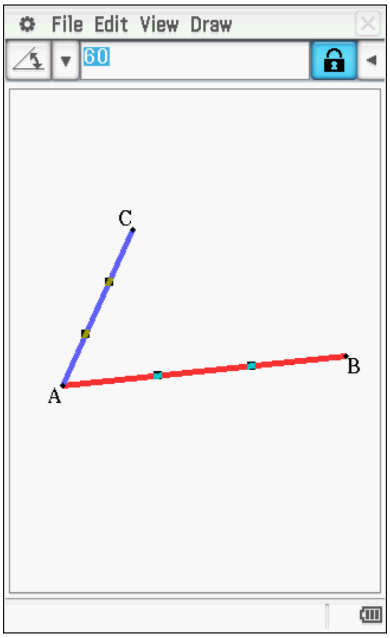




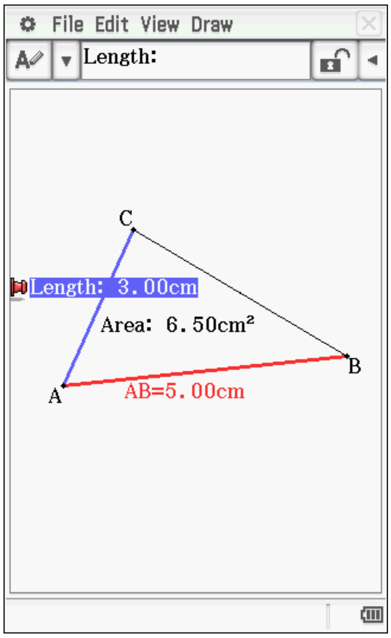
Gjenta for AC



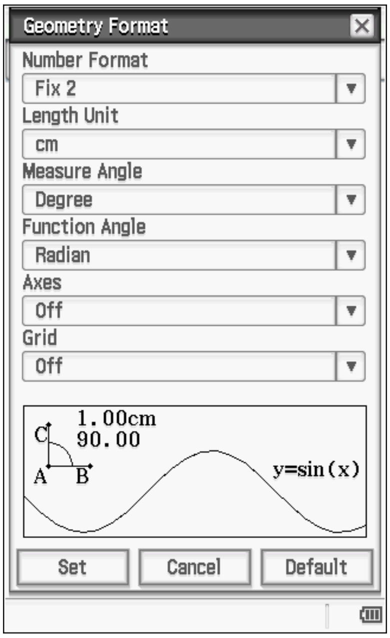
Sett vinkel A lik 60^o.



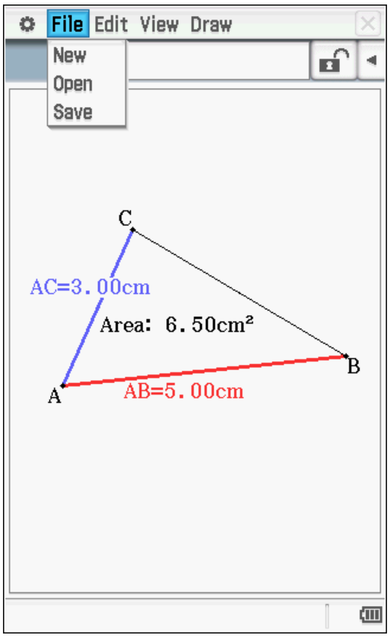
Vi kan endre tekst.



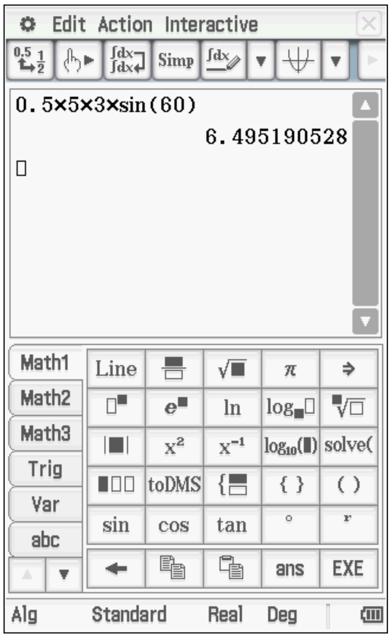
Enhet for lengde er satt til cm.



Vi kan lagre og åpne.



Arealsetningen gir.

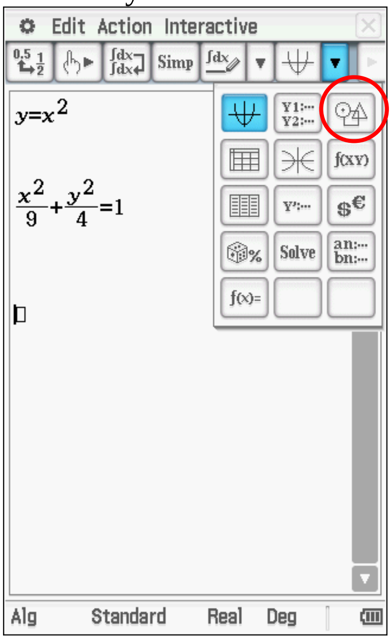


Øv på å tegne, måle og regne.

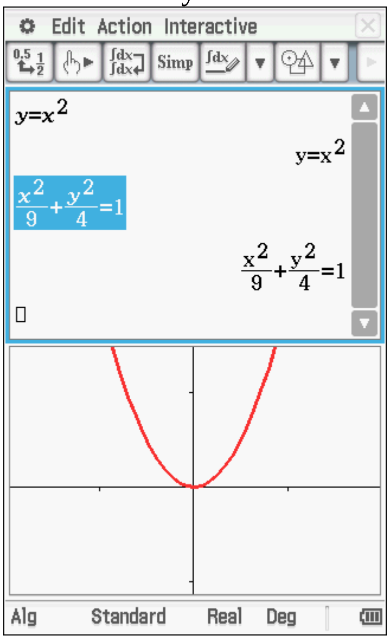
11.11 Fra Main til Geometri og vice versa

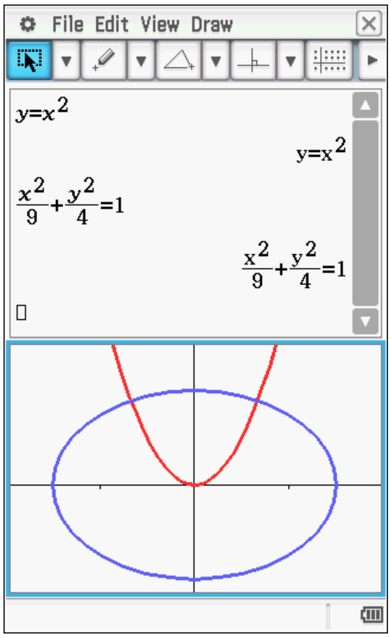
Legg uttrykkene $y = x^2$ og $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ i Main og dra parabelen og ellipsen til Geometri.

Skriv uttrykkene i Main.



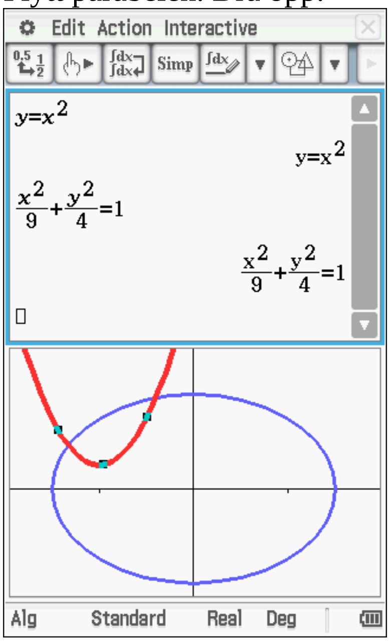
Marker et uttrykk. Dra ned.

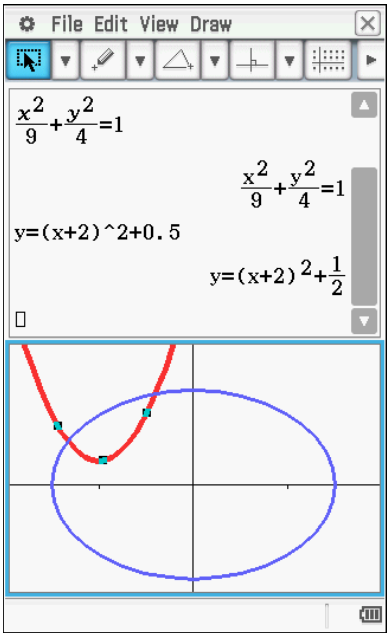




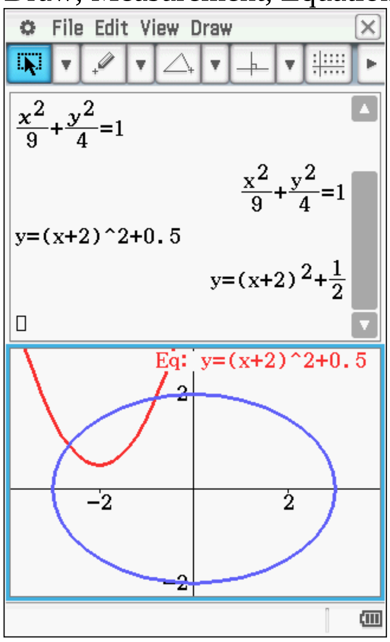
Vi kan også gå andre veien.

Flytt parabelen. Dra opp.





Draw, Measurement, Equation.



Flytt ellipsen i koordinatsystemet og finn uttrykket i Main.

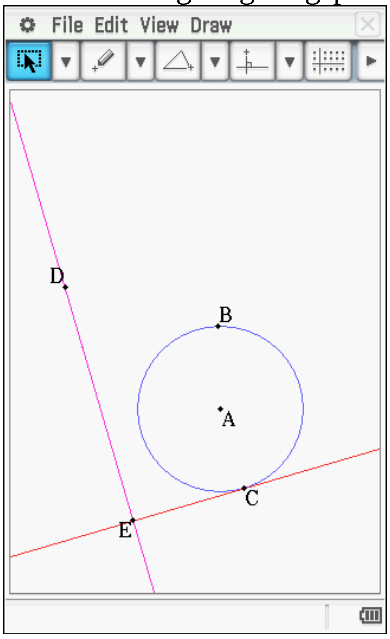
11.12 Animasjon

En annen interessant egenskap ved CP400 er muligheten vi har til å utføre animasjoner. Dette er spesielt nyttig når vi utforsker kurver som er definert ved spesielle egenskaper. Ved å bruke animasjon kan vi for eksempel få tegnet en kurve.

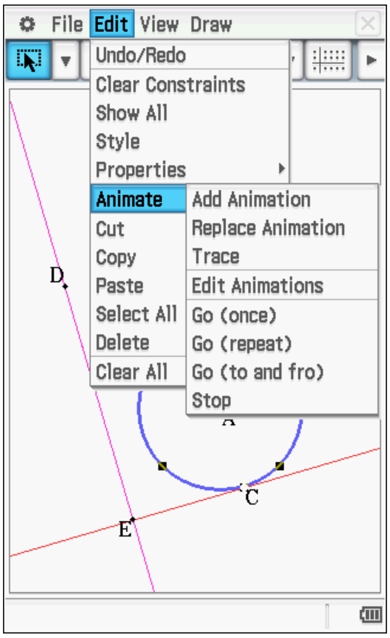
Animer det geometriske stedet som blir kalt ”Pascals Snegle”.

Tegn en sirkel og konstruer en tangent til sirkelen. Plasser et punkt D utenfor sirkelen og konstruer en loddrett linje fra dette punktet ned på tangenten. Merk av skjæringspunktet E mellom tangenten og den loddrette linjen. Roter tangenten rundt sirkel og tegn kurven som E beskriver.

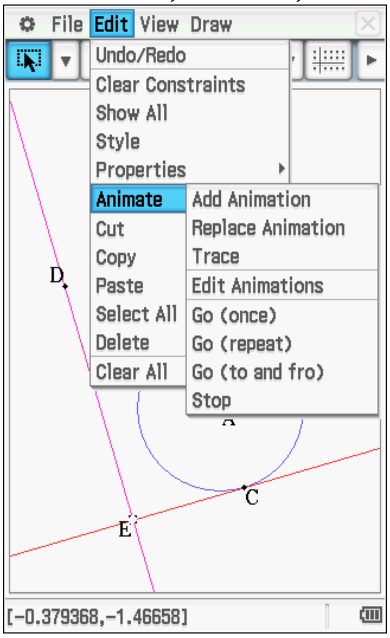
Merk sirkel og tangeringspunkt.



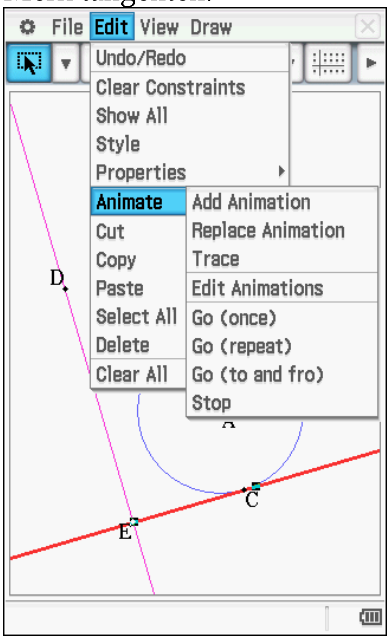
Add Animation.



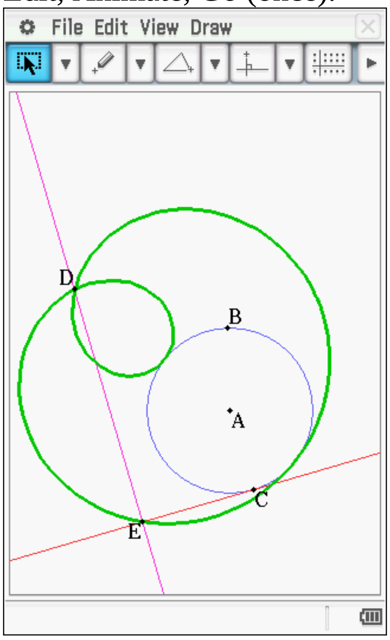
Merk E. Edit, Animate, Trace.



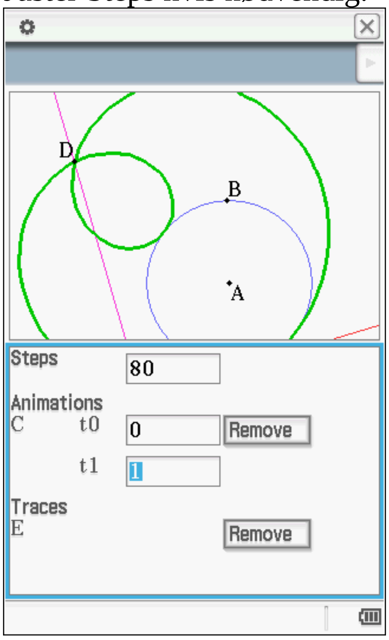
Merk tangenten.



Edit, Animate, Go (once).



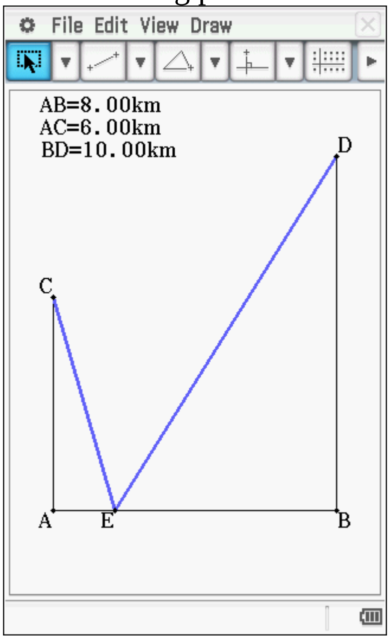
Juster Steps hvis nødvendig.



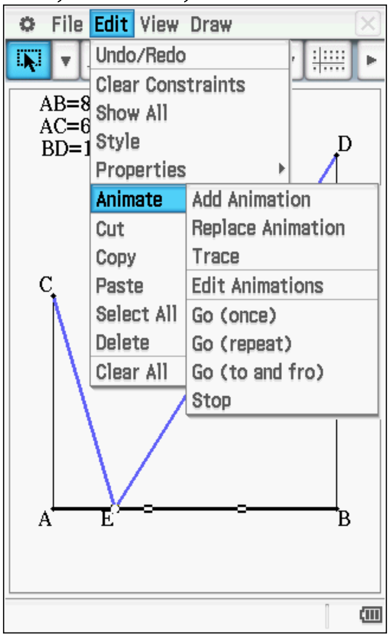
Vi justerer Steps i Edit, Animate, Edit Animation.

Bruk animasjon til å finne ut hvor på AB punkt E må plasseres for at CE+DE skal bli minst mulig. Målene er som vist på første skjermbilde til venstre.

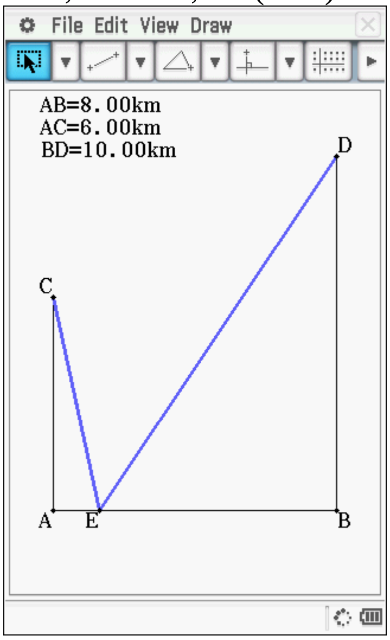
Marker AB og punkt E.



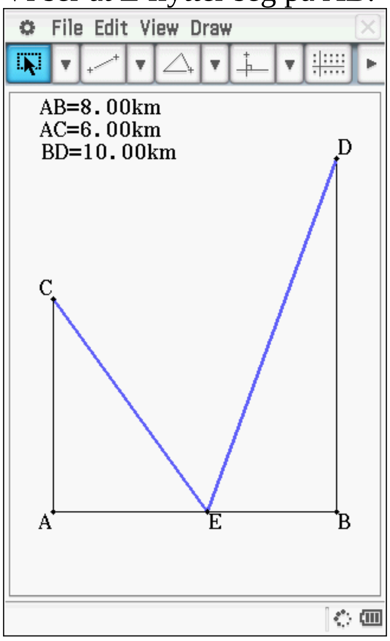
Edit, Animate, Add Animation.

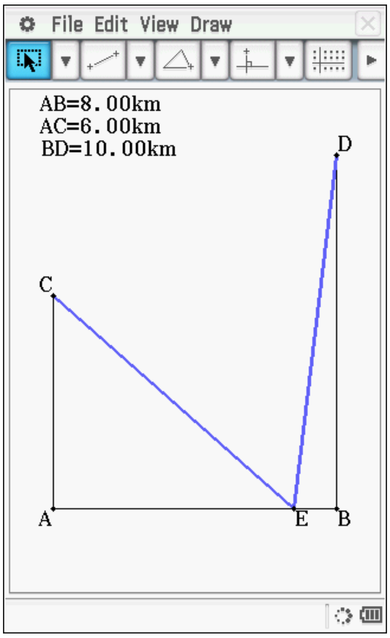


Edit, Animate, Go (once).

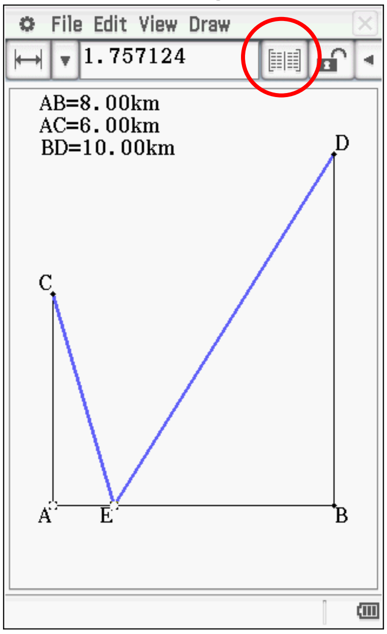


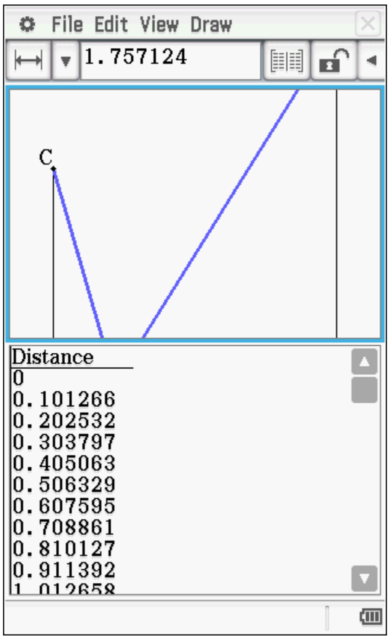
Vi ser at E flytter seg på AB.



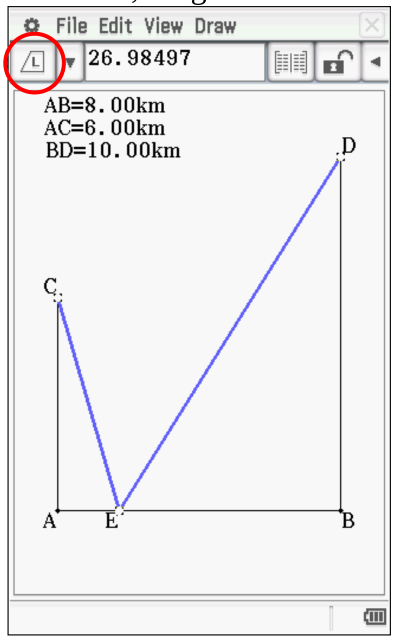


Marker AE. Velg tabell.

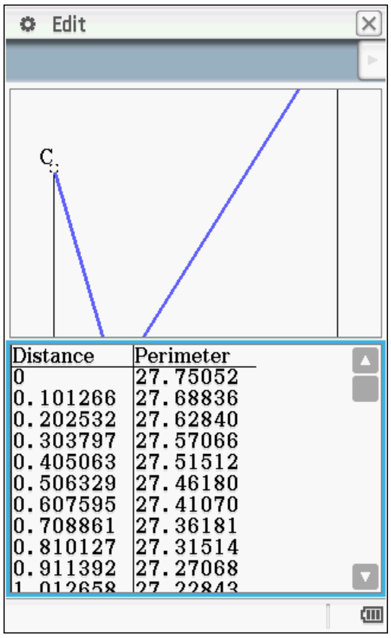




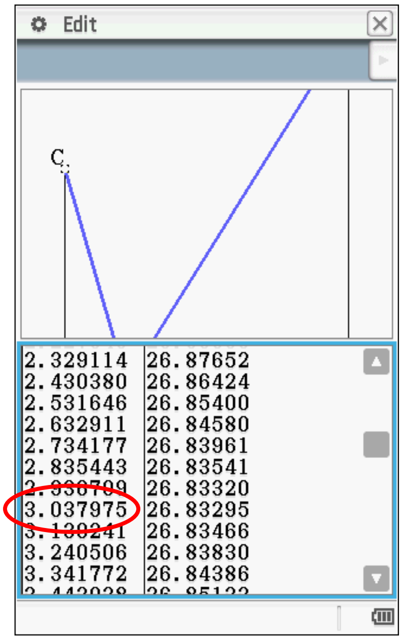
Marker C, E og D.



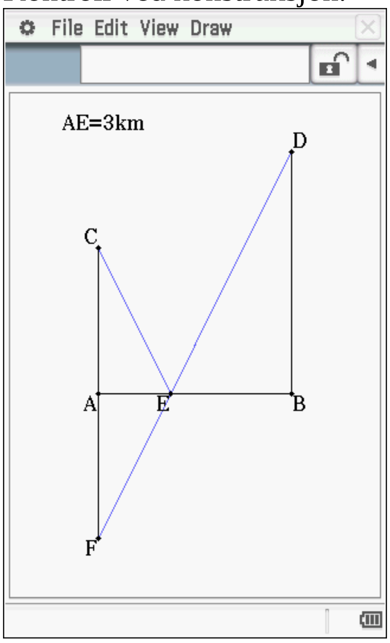
CE + DE + CD



Søk i tabellen.



Kontroll ved konstruksjon.

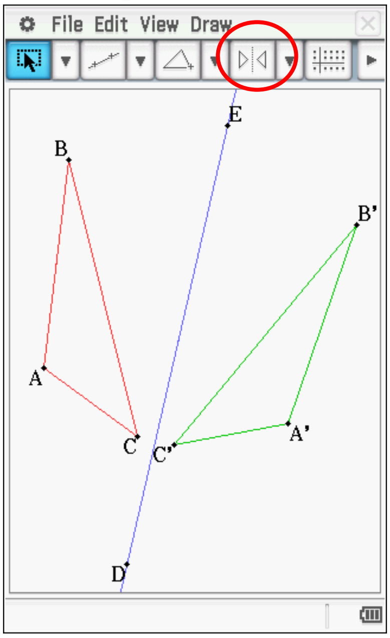


Hvorfor?

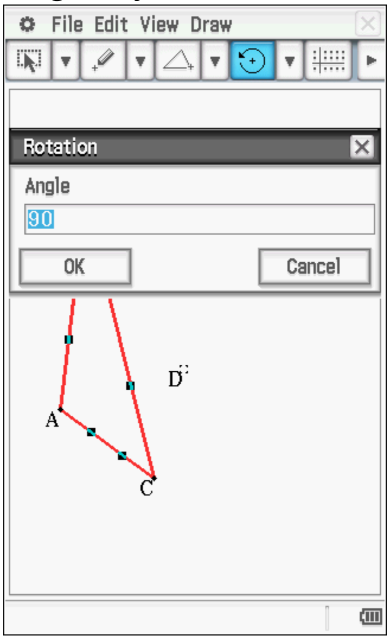
11.13 Refleksjon, rotasjon og translasjon

Vi viser til User´s Guide for detaljer. Her viser vi bare noen enkle eksempler på refleksjon (speiling), rotasjon og translasjon.

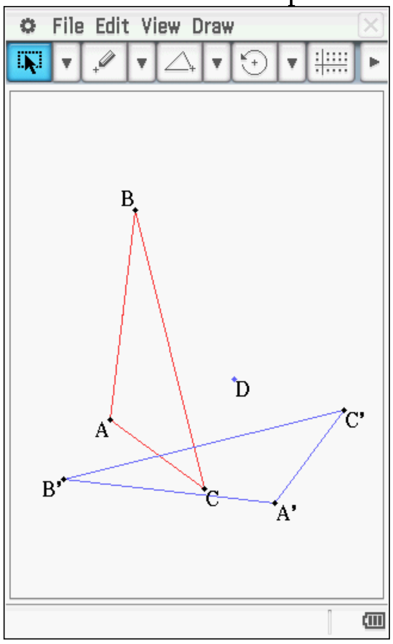
ABC er speilet om aksen DE.



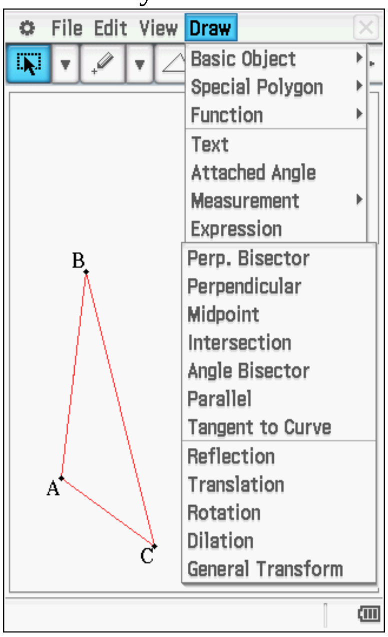
Velg rotasjonsvinkel.



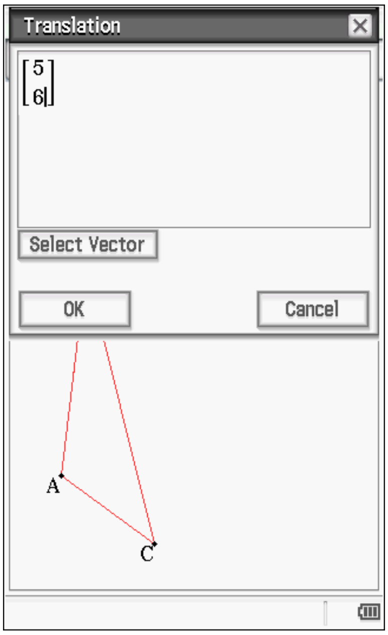
ABC er rotert 90° om punkt D.



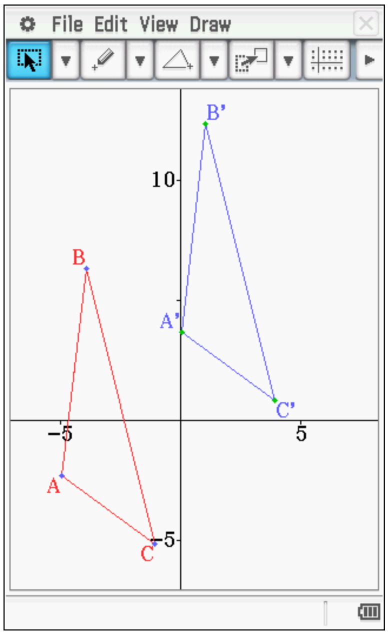
Velg Translation.



Skriv inn vektoren.



Translasjonen i koordinatsystemet.



12. Differensiallikninger

12.1 Innledning

Differensiallikninger har mange anvendelsesområder – temperaturen til en gjenstand som avkjøles, eksponensiell vekst, elektrisk utladning, radioaktiv stråling, akselerert bevegelse, også videre.

En differensiallikning inneholder deriverte eller differensialer. Det er viktig å være i stand til å identifisere hvilken type differensiallikning vi har med å gjøre, før vi forsøker å løse likningen på CP400.

En differensiallikning som inneholder ledd der den førstederiverte er den høyeste orden av den deriverte, kaller vi en førsteordens differensiallikning. En andreordens differensiallikning har ledd der den andrederiverte er høyeste orden av den deriverte. Differensiallikninger av andre orden kan altså inneholde ledd med førstederivert.

Graden til en differensiallikning er bestemt av eksponenten til den høyeste deriverte som finnes i likningen.

Differensiallikningen $(y'')^4 + 3(y')^5 - 4y = 3$ har *orden* 2 siden den høyeste deriverte som finnes i denne likningen, er den andrederiverte. Siden eksponenten til den høyeste deriverte i denne differensiallikningen er 4, har likningen *graden* 4.

12.2 Generell og partikulær løsning

Når vi løser ubestemte integraler får vi først en såkalt generell løsning som inneholder en konstant *C*. En såkalt partikulær løsning får vi først etter at *C* tar en bestemt verdi. Verdien for konstanten finner vi ved hjelp av kjente verdier for *x* og *y* som følge av gitte betingelser. De kjente betingelsene kaller vi grensebetingelser eller initialbetingelser. Det forholder seg på tilsvarende vis når det gjelder differensiallikninger.

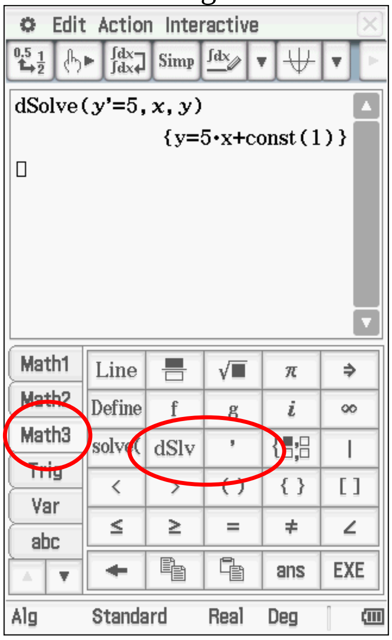
Finn den generelle løsningen til den elementære differensiallikningen $y' = 5$ ved hjelp av CP400.

Finn den partikulære løsningen til differensiallikningen $y' = 5$ der initialbetingelsen er $x = 0$ når $y = 2$.

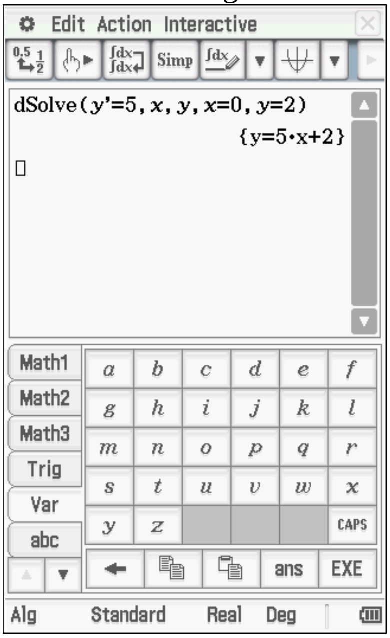
Funksjonen dSolve på CP400 løser differensiallikninger av første, andre og tredje orden samt likningssett av førsteordens differensiallikninger.

For å finne den generelle løsningen benytter vi følgende syntaks [likning, uavhengig variabel, avhengig variabel].

Generell løsning.

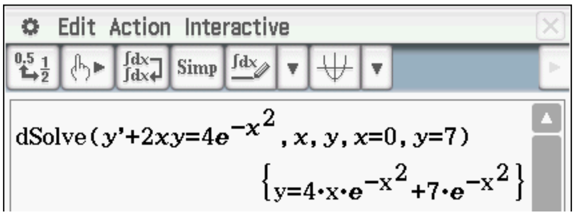


Partikulær løsning.



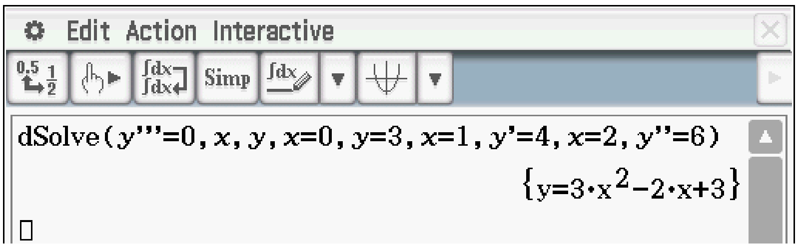
For å finne den partikulære løsningen må vi benytte følgende syntaks [likning, uavhengig variabel, avhengig variabel, initialbetingelse].

Løs differensiallikningen $y' + 2xy = 4e^{-x^2}$, $y(0) = 7$



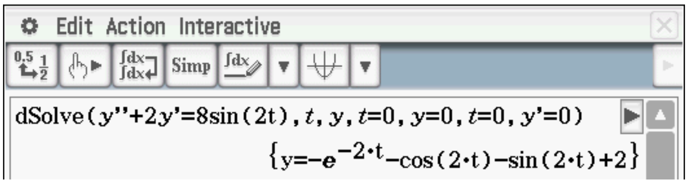
Syntaksen er [likning, uavhengig variabel, avhengig variabel, initialbetingelse].

Vi har gitt tredjeordens differensiallikning $y''' = 0$ med initialbetingelsene $y(0) = 3,\ y'(1) = 4$ og $y''(2) = 6$. Finn den partikulære løsningen til differensiallikningen på CP400.



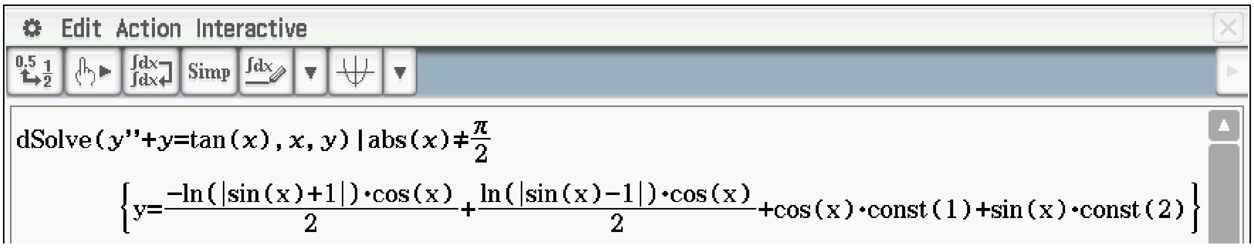
Syntaksen er [likning, uavhengig variabel, avhengig variabel, initialbetingelse-1, initialbetingelse-2, initialbetingelse-3].

Løs differensiallikningen $y'' + 2y' = 8\sin(2t)$, $y(0) = y'(0) = 0$



Merk: Rad-mode.

Løs differensiallikningen $y'' + y = \tan(x)$, $|x| \neq \dfrac{\pi}{2}$.



Utfordring

Vis ved hjelp av CP400 at den generelle løsningen til differensiallikningen $y'' - 3y' + 2y = 0$ kan uttrykkes som $y = Ae^{2x} + Be^{x}$ der A og B er konstanter.
Velg selv ulike initialbetingelser og finn partikulære løsninger.

12.3 Hastighet og akselerasjon

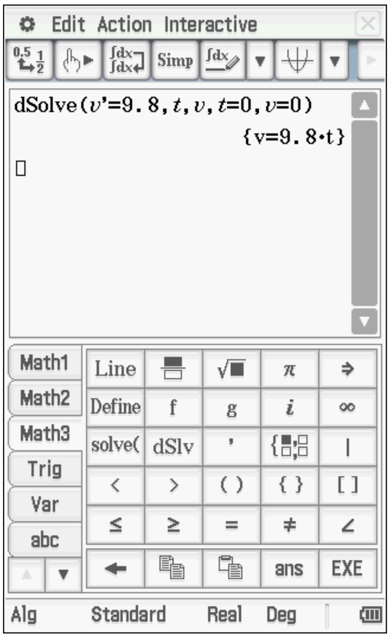
I nærheten av jordoverflaten er gravitasjonsakselerasjonen omtrent $9{,}8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Det betyr at hastigheten til en gjenstand som faller fritt i vakuum, øker med $9{,}8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ for hvert sekund.

Vi kan altså skrive at akselerasjonen (hastighetsendring per sekund) er $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}8\,\dfrac{\mathrm{m}}{s^2}$.

Vi slipper en gjenstand med utgangshastighet null. Vi tenker oss at gjenstanden faller mot bakken uten å møte luftmotstand. Hvor stor hastighet har gjenstanden *t* sekunder etter at den ble sluppet?

Vi løser differensiallikningen $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}8$, der initialbetingelsen er at $v = 0$ når $t = 0$.



CP400 gir at hastigheten til gjenstanden som faller fritt, er $v(t) = 9{,}8 \cdot t\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, t sekunder etter at den ble sluppet.
Merk at t har enhet s.

12.4 Separasjon av variabler

En bestemt type differensiallikninger kaller vi for separable. Denne typen differensiallikninger kan vi løse ved hjelp av en metode som innebærer såkalt variabelseparasjon.

Metoden er mulig bare dersom vi kan skrive differensiallikningen på formen $A(x)dx\ +\ B(y)dy = 0$ hvor $A(x)$ er en funksjon av kun x og der $B(y)$ er en funksjon av kun y.

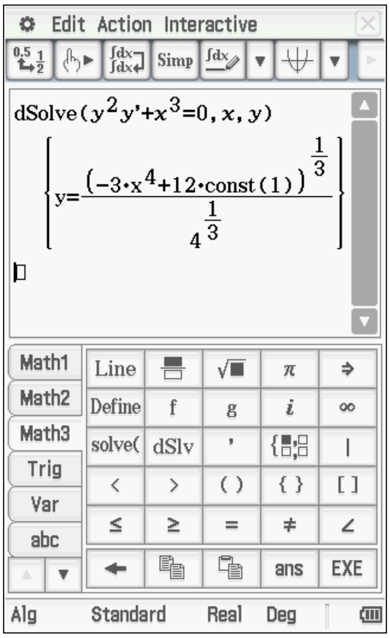
Etter at differensiallikningen om nødvendig er skrevet på formen som vist ovenfor, kan vi samle ledd med y på venstre side og ledd med x på høyre side. Så integrerer vi alle ledd for å finne en generell løsning.

La oss først løse differensiallikningen $y^2dy + x^3dx = 0$ uten CP400.

Denne likningen er heldigvis allerede på den ønskede formen. Vi isolerer leddene som beskrevet ovenfor og foretar integrering på begge sider av likhetstegnet. Da får vi at

$\int y^2dy = -\int x^3dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = -\frac{x^4}{4} + C_1 \Rightarrow y = \left(-\frac{3x^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + C_2$, som altså er en generell løsning av differensiallikningen.

 Løs differensiallikningen $y^2\mathrm{d}y + x^3\mathrm{d}x = 0$.



Siden $\dfrac{dy}{dx} = y'$ kan vi skrive den opprinnelige differensiallikningen som $y^2 \cdot y' + x^3 = 0$.

Vi en generell løsning på CP400 ved å følge syntaksen.

Utfordring

Vis at differensiallikningen $\dfrac{dy}{dx}\ln x - \dfrac{y}{x} = 0$ kan bli løst ved hjelp av variabelseparasjon. Løs så likningen for hånd. Kontroller svaret ditt ved å løse $y' \cdot \ln x - \dfrac{y}{x} = 0$ direkte på CP400.

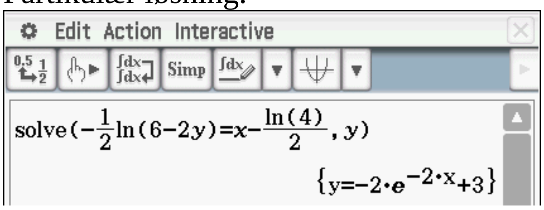
Finn, ved hjelp av variabelseparasjon, den partikulære løsningen til $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 6$ med initialbetingelsen $y = 1$ når $x = 0$.

Separasjon av variabler gir $\dfrac{dy}{6-2y} = dx$. Vi integrerer på begge sider av likhetstegnet og får at $\int \dfrac{dy}{6-2y} = \int dx$ som impliserer at $-\dfrac{1}{2}\ln|6-2y| = x + C$.

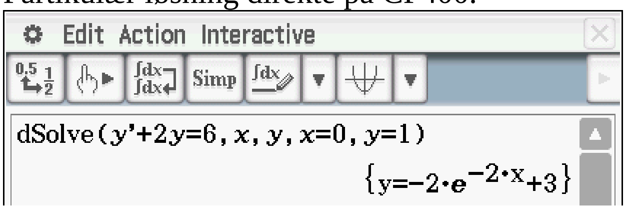
Siden $y = 1$ når $x = 0$ får vi at $-\dfrac{1}{2}\ln|6-2\cdot 1| = 0 + C$ som videre gir at $C = -\dfrac{1}{2}\ln 4$.

Når vi setter $C = -\dfrac{1}{2}\ln 4$ inn i den generelle løsningen får vi likningen $-\dfrac{1}{2}\ln|6-2y| = x - \dfrac{1}{2}\ln 4$.

Partikulær løsning.



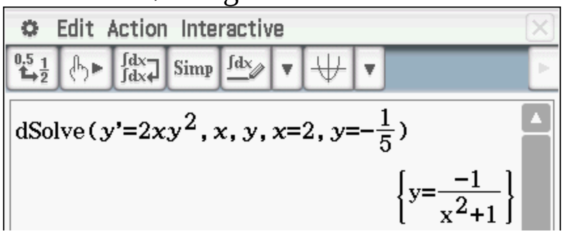
Partikulær løsning direkte på CP400.



Den partikulære løsningen til differensiallikningen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=6$, med initialbetingelsen $y=1$ når $x=0$, er altså $y=-2\mathrm{e}^{-2x}+3$

Løs den separable differensiallikningen $y'=2xy^2$, $y(2)=-\frac{1}{5}$.

Partikulær løsning.



Merk:
Siden nevneren $x^2+1\neq 0$ er y definert for alle x.

Kontroller ved å løse for hånd.

Utfordring

I en elektrisk krets gir Kirchhoffs lov følgende differensiallikning: $R\cdot I+L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=U$,
der $R=10\ \Omega$, $L=2\ \mathrm{H}$, $U=60\ \mathrm{V}$ og $I=0$ når $t=0$.

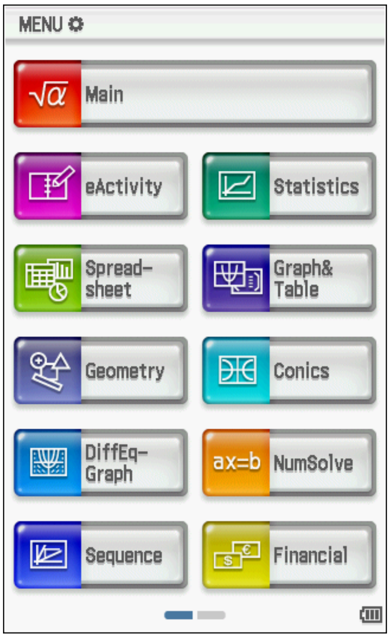
Løs differensiallikningen både ved variabelseparasjon og direkte på CP400.

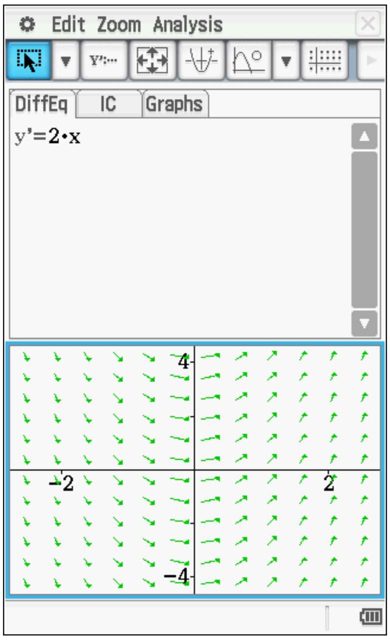
12.5 Retningsdiagram og integralkurver

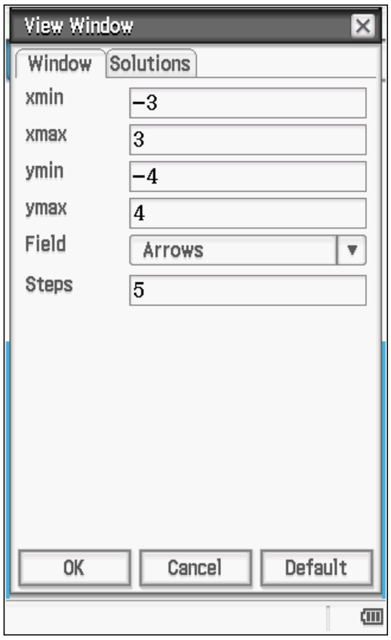
Vi kan visualisere løsningen til en første ordens differensiallikning uten å løse likningen. Et såkalt retningsdiagram visualiserer hva differensiallikningen uttrykker, og hjelper oss med å kunne se for oss hvordan løsningsfunksjonen ser ut. Løsningene til en differensiallikning er en familie av funksjoner. Grafene til disse funksjonene kalles løsningskurvene, eller integralkurvene til differensiallikningen.

Tegn retningsdiagrammet til differensiallikningen $y'=2x$.
Tegn integralkurven når $x=0$ og $y=0$.

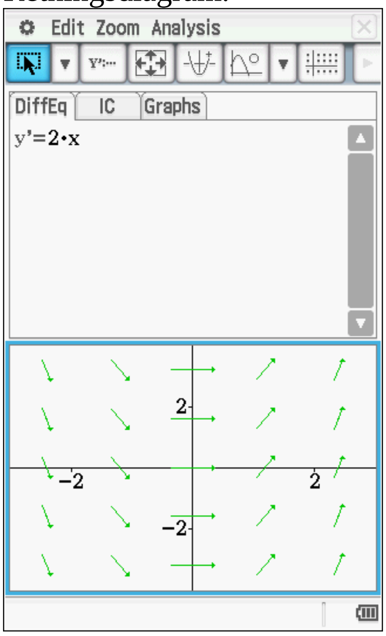
Velg DiffEq-Graph   Skriv likningen.   Endre Steps.

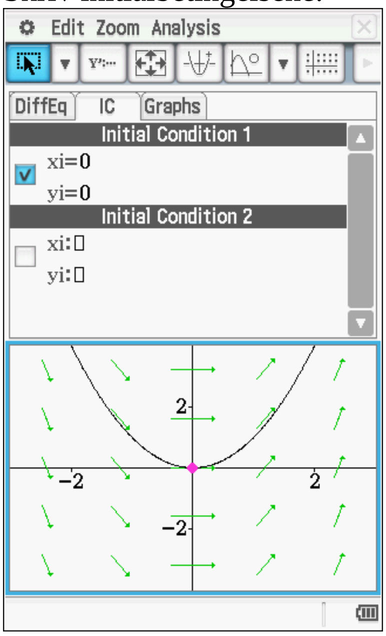






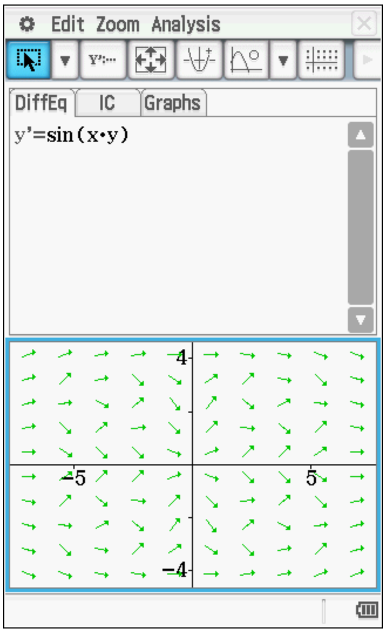
Retningsdiagram.   Skriv initialbetingelsene.

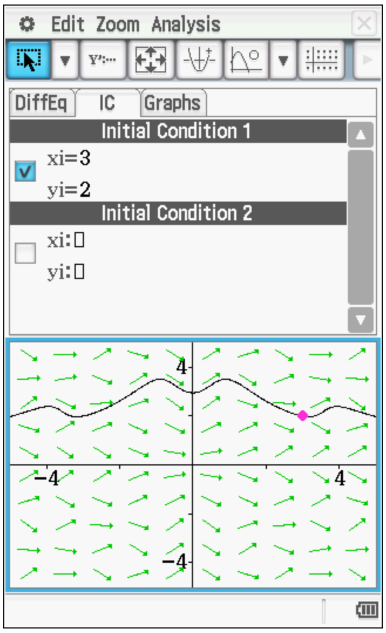


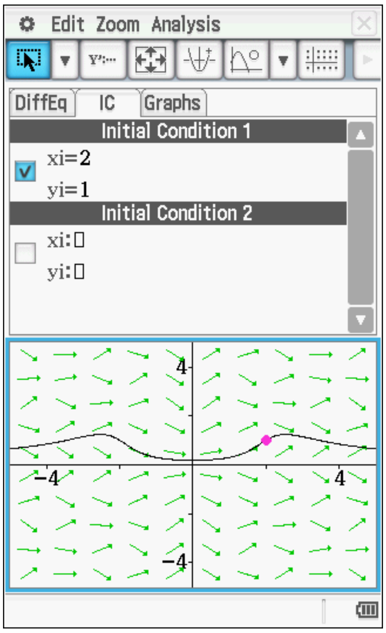


Tegn retningsdiagrammet til differensiallikningen $\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$, og tegn integralkurven for initialbetingelsen $x = 3$ og $y = 4$.

Skriv likningen.　　Skriv initialbetingelsene.　　Pek og flytt punktet.







Du kan endre initialbetingelser ved å peke og flytte på punktet.